Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
Postgrado en Física

Introducción a la Mecánica Cuántica Relativista
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/imcr_p.html`

Tarea 1
Preliminares
La ecuación de Schrödinger-Pauli
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/imcr_p(t1).pdf`

1°) Demuestre que las matrices de Pauli satisfacen la siguiente relación:

$$\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k = \delta_{jk}\hat{1}_{2\times 2} + i\epsilon_{jkl}\hat{\sigma}_l, \tag{1.1}$$

donde ϵ_{jkl} es el símbolo de Levi-Civita: $+1$ si $jkl = 123$, 231, o 312; -1 si $jkl = 132$, 213, o 321; 0 en cualquier otro caso. Ayuda: las matrices de Pauli también satisfacen las relaciones

$$\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k + \hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_j \equiv [\hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_k]_+ = 2\delta_{kl}\hat{1}_{2\times 2}\,, \quad \hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k - \hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_j \equiv [\hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_k]_- = 2i\epsilon_{jkl}\hat{\sigma}_l \tag{1.2}$$

¿por qué? Explique detalladamente su respuesta.

2°) Demuestre la siguiente relación:

$$(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}})(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}) = \hat{\boldsymbol{\pi}}\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}} - \frac{e\hbar}{c}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}), \tag{2.1}$$

donde $\hat{\boldsymbol{\pi}} = \hat{\boldsymbol{p}} - (e/c)\boldsymbol{A} = -i\hbar\nabla - (e/c)\boldsymbol{A}$ es el operador momentum mecánico.

3°) Demuestre que en un campo magnético uniforme débil,

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} = \nabla\times\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r}\right) = \boldsymbol{B}, \tag{3.1}$$

el Hamiltoniano de Schrödinger-Pauli (con $V = 0$),

$$\hat{H}_{\text{SP}} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 - \frac{e\hbar}{2mc}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{B}, \tag{3.2}$$

toma la siguiente forma:

$$\hat{H}_{\text{SP}} = \frac{1}{2m}\hat{\boldsymbol{p}}^2 - \frac{e}{2mc}(\hat{\boldsymbol{L}} + g\hat{\boldsymbol{S}})\cdot\boldsymbol{B}, \tag{3.3}$$

donde $g = 2$ (esta es la razón giromagnética), $\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{p}}$ es el momentum angular orbital y $\hat{\boldsymbol{S}} = \hbar\hat{\boldsymbol{\sigma}}/2$ es el espín del electrón.

4°) En este problema se estudiará el llamado efecto Zeeman simple, es decir, la separación de las lineas espectrales en un campo magnético débil (se despreciará la llamada interacción espín-órbita que lleva a la estructura fina del espectro). Suponga que el campo magnético es débil y homogeneo, y tiene solo una componente, $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{k}}$, es decir, el potencial vector es $\boldsymbol{A} = (-By\hat{\boldsymbol{\imath}} + Bx\hat{\boldsymbol{\jmath}})/2$. (a) Compruebe que $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$. (b) Demuestre que al despreciar el término con $\boldsymbol{A}^2$, y usando la condición $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$, el Hamiltoniano de Schrödinger-Pauli toma la siguiente forma:

$$\hat{H}_{\rm SP} = \frac{1}{2m}\hat{\boldsymbol{p}}^2 - \frac{e}{mc}\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + eV - \frac{e\hbar}{2mc}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{B}. \tag{4.1}$$

(c) Demuestre que se verifica la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} = \frac{B}{2}\hat{L}_z, \tag{4.2}$$

donde $\hat{L}_z$ es la componente z del operador momentum angular. (d) Defina el Hamiltoniano $\hat{H}_0 = \hat{\boldsymbol{p}}^2/2m + eV$ y escriba la ecuación de Schrödinger-Pauli en la forma

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}_0\Psi - \frac{eB}{2mc}(\hat{L}_z + \hbar\hat{\sigma}_z)\Psi. \tag{4.3}$$

Suponga ahora que la función de onda describe un estado estacionario en la energía, $\Psi = \Psi(\boldsymbol{r}, t) = \psi(\boldsymbol{r})\exp(-iEt/\hbar)$. Así que la ecuación (4.3) se convierte en la siguiente ecuación para los autovalores de la energía:

$$\hat{H}_0\Psi - \frac{eB}{2mc}(\hat{L}_z + \hbar\hat{\sigma}_z)\Psi = E\Psi. \tag{4.4}$$

Demuestre que la ecuación (4.4) es equivalente a las ecuaciones (desacopladas)

$$\hat{H}_0\psi_1 + \omega_{\rm L}(\hat{L}_z + \hbar)\psi_1 = E\psi_1\,, \quad \hat{H}_0\psi_2 + \omega_{\rm L}(\hat{L}_z - \hbar)\psi_2 = E\psi_2, \tag{4.5}$$

donde $\omega_{\rm L} = -eB/2mc$ es la llamada frecuencia de Larmor, y ψ_1 y ψ_2 son las componentes de arriba y de abajo, respectivamente, del espinor de Pauli. (e) Compruebe que los niveles de energía vienen dados por

$$E = E_{nlm} = E^0_{nlm} \pm \omega_{\rm L}\hbar(m+1), \tag{4.6}$$

donde el signo $+$ corresponde a la función de onda $\Psi = \begin{bmatrix} \psi_{nlm} \\ 0 \end{bmatrix}$, y el signo $-$ a la función de onda $\Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_{nlm} \end{bmatrix}$. Además, $\hat{L}_z\psi_{nlm} = m\hbar\psi_{nlm}$, y también ψ_{nlm} es solución de las ecuaciones (4.5). Nota: debido al campo magnético, la energía depende de la orientación del momento magnético con respecto a la dirección del campo magnético. Los niveles que están degenerados cuando el campo magnético no esta presente, entonces se separan. La separación en dos de los estados s ($l = 0$), los cuales no tienen momento magnético orbital, es prueba de la existencia del espín. (f) Explique la separación que experimentan los niveles de energía para los estados ψ_{100} y ψ_{21m}. En particular, compruebe que el estado $2p$ ($n = 2$, $l = 1$) se separa en cinco niveles, uno de estos está degenerado.

5°) (a) Encuentre los autovalores y autofunciones del operador componente azimutal del momentum angular,

$$\hat{\boldsymbol{L}}_\phi = \cos(\phi)\hat{\boldsymbol{L}}_x + \sin(\phi)\hat{\boldsymbol{L}}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} & 0 \\ e^{+i\phi} & 0 & e^{-i\phi} \\ 0 & e^{+i\phi} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Ayuda: la autofunción correspondiente al autovalor $L_\phi = +\hbar$ se puede escribir así:

$$v_\phi^{(+1)} = \left(\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\phi} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{+i\phi} \end{array} \right), \tag{5.2}$$

con resultados similares para $v_\phi^{(0)}$ y $v_\phi^{(-1)}$. Nota: un re-etiquetado $\phi \to \phi + 2\pi$ no debería tener ningún efecto sobre los resultados ya que las dos etiquetas para el mismo ángulo son fisicamente equivalentes. (b) Verifique que $|v_{\phi+2\pi}|^2 = |v_\phi|^2$, así que las densidades de probabilidad son invariantes como debe ser; también note que se verifica la condición más fuerte $v_{\phi+2\pi} = v_\phi$, así que la función de onda regresa a la misma fase después de una rotación. Otra nota: mientras que estos resultados podrían parecer obvios para cualquier sistema clásico, los correspondientes resultados para el (no-clásico) grado de libertad de espín, serán diferentes. (c) Encuentre los autovalores y autofunciones del operador componente azimutal del momentum angular intrínseco, o de espín,

$$\hat{\boldsymbol{S}}_\phi = \cos(\phi) \hat{\boldsymbol{S}}_x + \sin(\phi) \hat{\boldsymbol{S}}_y = \frac{\hbar}{2} \left(\begin{array}{cc} 0 & e^{-i\phi} \\ e^{+i\phi} & 0 \end{array} \right). \tag{5.3}$$

Ayuda: aquí tiene los resultados: los autovalores de $\hat{\boldsymbol{S}}_\phi$ son $+\hbar/2$ y $-\hbar/2$, y sus correspondientes autovectores son:

$$v^{(+1/2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c} e^{-i\phi/2} \\ e^{+i\phi/2} \end{array} \right), \quad v^{(-1/2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c} e^{-i\phi/2} \\ -e^{+i\phi/2} \end{array} \right). \tag{5.4}$$

(d) Demuestre que ambos espinores satisfacen la relación $\left| v_{\phi+2\pi}^{(\pm 1/2)} \right|^2 = \left| v_\phi^{(\pm 1/2)} \right|^2$, así que la densidad de probabilidad no cambia por un re-etiquetamiento del ángulo (como uno esperaría). Sin embargo, las funciones de onda espinoriales (o amplitudes), sí cambian de signo. (e) En efecto, demuestre que $v_{\phi+2\pi}^{(\pm 1/2)} = -v_\phi^{(\pm 1/2)}$. Nota: este último resultado implica que se necesita una rotación de 4π para regresar los autoespinores a su fase original. Este cambio de fase bajo rotaciones es típico de las funciones de onda fermiónicas de espín 1/2 y no tiene análogo clásico.

6°) Como usted sabe, el símbolo de Levi-Civita en tres dimensiones, ϵ_{ijk}, se define como: $\epsilon_{ijk} = 0$, si algunos de sus índices están repetidos, $\epsilon_{ijk} = +1$, si la permutación (ijk) es par comparada con la (123), y $\epsilon_{ijk} = -1$, si la permutación es impar. (a) Verifique que

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} = \left| \begin{array}{ccc} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{array} \right|. \tag{6.1}$$

(b) Y en particular

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{pqk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}. \tag{6.2}$$

(c) Y también

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{pjk} = 2\delta_{ip}. \tag{6.3}$$

7°) Como usted sabe, bajo una transformación de Lorentz el cuadrivector posición x^μ (contravariante) se transforma de la siguiente manera:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}\, x^{\nu} \quad (\Rightarrow x^{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\ \nu}\, x'^{\nu}). \tag{7.1}$$

Demuestre que

$$x'_{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\ \mu}\, x_{\nu} \quad (\Rightarrow x_{\mu} = \Lambda^{\nu}_{\ \mu}\, x'_{\nu}). \tag{7.2}$$