Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
Postgrado en Física

Introducción a la Mecánica Cuántica Relativista
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/imcr_p.html`

Tarea 10
Preliminares
La ecuación de Dirac
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/imcr_p(t10).pdf`

1°) El "slash de Feynman" se define como $\not{A} \equiv A^\mu \gamma_\mu$. Demuestre que $\not{A}^2 = A^2$.

2°) Como se presentó en la última clase, la ecuación de Dirac en la representación de Weyl con $m = 0$,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}\Psi = \begin{bmatrix} c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} & 0 \\ 0 & -c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones desacopladas (usualmente llamadas ecuaciones de Weyl):

$$i\hbar \frac{\partial \psi_R}{\partial t} = c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}\psi_R\,, \quad i\hbar \frac{\partial \psi_L}{\partial t} = -c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}\psi_L. \tag{2.2}$$

Es claro que, si Ψ es solución de (2.1), entonces los espinores

$$\Psi_R \equiv \begin{bmatrix} \psi_R \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \Psi_L \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_L \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

también son solución. Demuestre que las ecuaciones (2.2) no son invariantes bajo paridad; en efecto, bajo paridad Ψ_R y Ψ_L se intercambian: $\Psi_R \overset{\hat{\mathrm{P}}}{\leftrightarrow} \Psi_L$. Recuerde que $\hat{\mathrm{P}}\Psi(\boldsymbol{r}, t) = \hat{\gamma}^0\Psi(-\boldsymbol{r}, t)$, y en la representación de Weyl $\hat{\gamma}^0$ es anti-diagonal.

3°) La ecuación que define a la operación de conjugación de carga, evidentemente fija a la matriz $\hat{S}_c$ dentro de una constante total ("an overall constant"). Por ejemplo, en las representaciones de Dirac y de Weyl se tiene que $\hat{S}_c = \eta\hat{\gamma}^2$, donde η es esa constante. Demuestre que η se puede fijar si se exige que $(\psi_c)_c = \psi$.

4°) Demuestre, o pruebe que (a) $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = -\frac{i}{2}\hat{\boldsymbol{\alpha}} \times \hat{\boldsymbol{\alpha}} = +\frac{i}{2}\hat{\boldsymbol{\gamma}} \times \hat{\boldsymbol{\gamma}}$, y también que (b) $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \hat{\gamma}^5\hat{\gamma}^0\hat{\boldsymbol{\gamma}}$.

5°) (a) Tome el límite $m \to 0$ de las cuatro soluciones de la ecuación de Dirac que se obtuvieron en clase con $A^\mu = (A^0, \boldsymbol{A}) = (0, \boldsymbol{0})$ (los espinores $\psi_D^{(r)}(x)$, con $r = 1, 2, 3, 4$). (b) Ya que estas soluciones $\psi_D^{(r)}(x)$ están escritas en la representación de Dirac, páselas a la representación de Weyl. Ayuda: recuerde que ambas representaciones están relacionadas por una transformación de similaridad unitaria: $\psi_W = \hat{S}\psi_D$ y $\hat{\gamma}^\mu_W = \hat{S}\hat{\gamma}^\mu_D\hat{S}^{-1}$, donde

$$\hat{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & -\hat{1} \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

(c) Encuentre la autofunción conjugada de carga de cada una de estas autofunciones y relacionelas con otra de las autofunciones (como se hizo en clase). (d) ¿De cuales operadores son estas soluciones autofunciones? ¿Cuales son los respectivos autovalores?

6°) Con la ayuda de la ecuación de Heisenberg de movimiento uno puede inmediatamente determinar si un observable dado es, o no, una constante de movimiento. Nota: aquí tiene esa ecuación:

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_{\mathrm{H}}(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{A}_{\mathrm{H}}(t)] + e^{+i\hat{H}t/\hbar}\,\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_{\mathrm{S}}\,e^{-i\hat{H}t/\hbar}. \tag{6.1}$$

A partir de aquí, no colocaremos mas los subíndices H y S (que indican respectivamente que el operador esta escrito en el marco de Heisenberg, y en el de Schrödinger); tampoco colocaremos la dependencia con el tiempo de los operadores. Además, todos los operadores con los que trataremos no dependen explícitamente del tiempo en el marco de Schrödinger. (a) Para una partícula libre cuyo Hamiltoniano de Dirac (en el marco de Heisenberg) es

$$\hat{H} = c\hat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + mc^2\hat{\beta}, \tag{6.2}$$

se tiene que la ecuación de Heisenberg para el momentum nos lleva al siguiente resultado:

$$\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{p}} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\boldsymbol{p}}] = \mathbf{0}. \tag{6.3}$$

Es decir, $\hat{\boldsymbol{p}}$ es una constante de movimiento ¡Demuéstrelo! (b) Considere el momentum angular orbital para una partícula libre $\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{p}}$. Demuestre que

$$\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{L}} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\boldsymbol{L}}] = c\,\hat{\boldsymbol{\alpha}}\times\hat{\boldsymbol{p}}. \tag{6.4}$$

Este resultado significa que para una partícula de Dirac libre, $\hat{\boldsymbol{L}}$ no es una constante de movimiento. (c) De la misma forma, demuestre que el momentum angular de espín (o intrínseco), $\hat{\boldsymbol{S}} = \frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$, satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{S}} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\boldsymbol{S}}] = -c\,\hat{\boldsymbol{\alpha}}\times\hat{\boldsymbol{p}}. \tag{6.5}$$

Así, el momentum angular de espín de un electrón libre no es una constante de movimiento. (d) Demuestre ahora que la cantidad

$$\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}} \tag{6.6}$$

si es una constante de movimiento. Nota: por supuesto, $\hat{\boldsymbol{J}}$ es el momentum angular total. (e) Demuestre que la cantidad $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}$ es una constante de movimiento. Nota: esto implica justamente que la helicidad es una constante de movimiento.

7°) Ya que la función de onda conjugada de carga ψ_c transforma como un espinor, la invariancia de Lorentz permite no solo la ecuación de Dirac $i\hbar\hat{\gamma}^\mu\partial_\mu\psi = mc\,\psi$ sino también la ecuación de Majorana $i\hbar\hat{\gamma}^\mu\partial_\mu\psi = mc\,\psi_c$. Esto fue notado por el físico italiano Ettore Majorana en los años treinta del siglo pasado. Por supuesto, la ecuación de Majorana es también una ecuación de onda relativista para fermiones, pero el término de masa contiene el conjugado de carga del espinor ψ, que es ψ_c. Considere la ecuación de Majorana:

$$i\hbar\hat{\gamma}^\mu\partial_\mu\psi = mc\,\psi_c. \tag{7.1}$$

Ya que ψ_c es la conjugada de carga de ψ, sabemos que en las representaciones de Dirac y de Weyl se verifican las siguientes relaciones:

$$\psi_c = \hat{\gamma}^2\psi^*\,, \quad (\hat{\gamma}^\mu)^* = \hat{\gamma}^2\hat{\gamma}^\mu\hat{\gamma}^2. \tag{7.2}$$

(a) ¡Explique de donde salen estos resultados! (b) Tome el complejo conjugado de (7.1) y multiplique esa ecuación por $\hat{\gamma}^2$. Use los resultados en (7.2) y obtenga la siguiente ecuación:

$$i\hbar\hat{\gamma}^\mu\partial_\mu\psi_c = mc\,\psi. \tag{7.3}$$

(c) Usando las ecuaciones (7.1) y (7.3) demuestre que ψ y ψ_c satisfacen la ecuación de Klein-Gordon-Fock, es decir,

$$\left(\partial^\mu\partial_\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0\,, \quad \left(\partial^\mu\partial_\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi_c = 0. \tag{7.4}$$

La masa m es conocida como la masa de Majorana de la partícula asociada con ψ. Ya que ψ y ψ_c llevan carga opuesta, la ecuación de Majorana, a diferencia de la ecuación de Dirac, puede ser aplicada solo a campos ("fields") electricamente neutros. Sin embargo, como ψ_c es "right-handed" si ψ es "left-handed", la ecuación de Majorana preserva la "handedness". Por eso es que la ecuación de Majorana es hecha a la medida del neutrino. Desde su concepción el neutrino se asumió sin masa pero ahora se sabe que tiene una masa pequeñísima; así que no es claro si la masa del neutrino es de Dirac o de Majorana. Finalmente, existe la posibilidad que $\psi = \psi_c$, en cuyo caso ψ es conocido como un espinor de Majorana. Ayuda para (c): note que

$$-\hbar^2\partial_\mu\partial^\mu\psi = -\hbar^2\hat{\gamma}^\mu\partial_\mu\hat{\gamma}^\nu\partial_\nu\psi = +i\hbar\hat{\gamma}^\mu\partial_\mu i\hbar\hat{\gamma}^\nu\partial_\nu\psi. \tag{7.5}$$