Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
Postgrado en Física

Introducción a la Mecánica Cuántica Relativista
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/imcr_p.html`

Tarea 2
Preliminares
La ecuación de Klein-Gordon
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/imcr_p(t2).pdf`

1°) (a) Demuestre que las ecuaciones

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}\,, \quad \boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}\,, \tag{1.1}$$

que verifican automáticamente las ecuaciones de Maxwell homogeneas ($\nabla\times\boldsymbol{E} + (\partial\boldsymbol{B}/\partial t) = \boldsymbol{0}$ y $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$), y las ecuaciones de Maxwell inhomogeneas

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \rho\,, \quad \nabla\times\boldsymbol{B} - (\partial\boldsymbol{E}/\partial t) = \boldsymbol{j}\,, \tag{1.2}$$

se pueden escribir de la siguiente manera:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\,, \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \tag{1.3}$$

Use la definición de $F^{\mu\nu}$ que se presentó en clase. (b) Demuestre que la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu \tag{1.4}$$

nos proporciona las ecuaciones de movimiento deseadas. Ayuda: escriba a $\mathcal{L}$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\left[(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\alpha A_\beta) - (\partial_\mu A_\nu)(\partial_\beta A_\alpha)\right] - j_\mu A^\mu. \tag{1.5}$$

Use ahora las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0. \tag{1.6}$$

2°) (a) Sea B_μ un vector covariante de Lorentz, es decir, el tiene la siguiente regla de transformación:

$$B'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}B_\nu. \tag{2.1}$$

En términos de este vector covariante, defina a $B^\mu = g^{\mu\nu}B_\nu$, donde $g^{\mu\nu}$ es el tensor métrico contravariante. Demuestre que B^μ es un vector contravariante de Lorentz, es decir, el tiene la siguiente regla de transformación:

$$B'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}B^\nu. \tag{2.2}$$

(b) Si $\mathcal{L}$ es un escalar de Lorentz, demuestre que $\partial\mathcal{L}/\partial A_\nu$ es un vector contravariante de Lorentz y $\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\mu A_\nu)$ es un tensor contravariante de Lorentz.

3°) El tensor completamente antisimétrico $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ esta definido para tomar los valores ± 1 si $\{\mu\nu\rho\sigma\}$ es una permutación cíclica/anticíclica de $\{0,1,2,3\}$, y cero si dos o más de los índices son iguales. (a) Demuestre que esta cantidad en verdad se transforma como un tensor de Lorentz de cuarto orden. (b) Demuestre que la métrica, $g^{\mu\nu}$, se transforma como un tensor de Lorentz de segundo orden. (c) Calcule las siguientes funciones escalares del tensor de campo electromagnético: $g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}$ y $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}$. De aquí, demuestre que $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{B}^2$ son invariantes de Lorentz.

4°) Demuestre que la ecuación de Klein-Gordon luego del acoplamiento minimal es invariante bajo transformaciones de calibre locales del campo electromagnético. Ayuda: como usted sabe, las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo transformaciones de calibre locales de la clase $A^\mu \to \bar{A}^\mu = A^\mu - \partial^\mu\chi$, donde $\chi = \chi(x)$ es una función escalar real de las coordenadas del espacio tiempo. Como en una teoría no relativista, esta invariancia de calibre local puede ser transferida a la ecuación de Klein-Gordon

$$\left[(\hat{p}^\mu - \frac{e}{c}A^\mu)(\hat{p}_\mu - \frac{e}{c}A_\mu) - m^2c^2\right]\Psi = 0 \tag{4.1}$$

multiplicando la función de onda Ψ por una fase escogida adecuadamente: $\Psi(x) \to \bar{\Psi}(x) = e^{i\Lambda(x)}\Psi(x)$. Para encontrar a la función Λ, escriba a la ecuación (4.1) en términos de las cantidades con la barra encima, luego verifique que haciendo $\Lambda(x) = e\chi(x)/\hbar c$ la ecuación para las cantidades con la barra encima se convierte en

$$\left[(\hat{p}^\mu - \frac{e}{c}\bar{A}^\mu)(\hat{p}_\mu - \frac{e}{c}\bar{A}_\mu) - m^2c^2\right]\bar{\Psi} = 0. \tag{4.2}$$

Nota: es un hecho a destacar que la transformación $\Psi(x) \to \bar{\Psi}(x)$ junto con $\Lambda(x) = e\chi(x)/\hbar c$ es igual a la transformación que lleva a la invariancia de calibre local en la teoría no relativista.

5°) Como se dijo en clase, las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon para una partícula libre en el interior de una caja y que satisfacen la condición de frontera periódica, tienen la forma siguiente:

$$\psi_{n\,(\pm)}(x) = \sqrt{\frac{mc^2}{E_{p_n}L^3}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{r} \mp E_{p_n}t)\right], \quad (x = (\boldsymbol{r},t)) \tag{5.1}$$

donde $\boldsymbol{p}_n = 2\pi\boldsymbol{n}/L$, $\boldsymbol{n} = (n_x,\, n_y,\, n_z)$; $n_i = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, y $E_{p_n} = \sqrt{(c\boldsymbol{p}_n)^2 + (mc^2)}$. (a) Demuestre usted mismo todos estos resultados. Nota: las soluciones (5.1) además están normalizadas en el sentido que $\pm e = \int_{L^3} d^3\boldsymbol{r}\,\rho_{(\pm)}(x)$, siendo la densidad de carga $\rho_{(\pm)} = \pm(eE_p/mc^2)\bar{\psi}_{(\pm)}\psi_{(\pm)}$. (b) Demuestre que las soluciones dadas en (5.1) satisfacen las siguientes relaciones -digamos- de "ortogonalidad":

$$\frac{i\hbar}{2mc^2}\int_{L^3} d^3\boldsymbol{r}\,\bar{\psi}_{n\,(\pm)}(x)\,\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t}\,\psi_{n'\,(\pm)}(x) = \pm\delta_{n,n'} \tag{5.2}$$

(el caso $n = n'$ es precisamente la relación

$$\pm\frac{E_{p_n}}{mc^2}\int_{L^3} d^3\boldsymbol{r}\,\bar{\psi}_{n\,(\pm)}(x)\,\psi_{n\,(\pm)}(x) = \pm 1), \tag{5.3}$$

y también

$$\frac{i\hbar}{2mc^2}\int_{L^3} d^3\boldsymbol{r}\,\bar{\psi}_{n\,(\pm)}(x)\,\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}\,\psi_{n'\,(\mp)}(x) = 0. \tag{5.4}$$

6°) Derive las ecuaciones de movimiento para los campos $\psi_\mu(x)$, a partir de un principio variacional. Ayuda: es decir, a partir de

$$\delta\int_{V_4} d^4x\,\mathcal{L}\left(\psi_\mu, \frac{\partial\psi_\mu}{\partial x_\nu}\right) = 0, \tag{6.1}$$

obtenga la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\psi_\mu/\partial x^\nu)}\right] = 0. \tag{6.2}$$

7°) Como se demostró en clase, en el límite no-relativista ($c \mid \boldsymbol{p} \mid \ll mc^2$), la ecuación de Klein-Gordon se reduce a la ecuación siguiente:

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - mc^2)\Psi(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\boldsymbol{r},t). \tag{7.1}$$

Demuestre que si se hace el "ansatz"

$$\Psi(\boldsymbol{r},t) = \chi(\boldsymbol{r},t)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}mc^2t\right), \tag{7.2}$$

entonces la ecuación para $\chi(\boldsymbol{r},t)$ es exactamente la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\chi(\boldsymbol{r},t). \tag{7.3}$$

8°) Busquemos soluciones estacionarias, es decir, de la forma

$$\Psi(x) \equiv \Psi(\boldsymbol{r},t) = \psi_E(\boldsymbol{r})\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right), \tag{8.1}$$

para la ecuación

$$\hat{H}\psi_E(\boldsymbol{r}) = E\psi_E(\boldsymbol{r})\,; \quad \hat{H} = \sqrt{(mc^2)^2 + (c\hat{\boldsymbol{p}})^2} + \frac{e_1e_2}{r}, \tag{8.2}$$

donde e_1 es la carga de la partícula, y e_2 la carga total de la fuente del campo. Podemos usar la notación $e_1e_2 = -\hbar c\alpha_0$; si las cargas de las partículas son las del pión π^- o del kaón K^-, y el campo es el de un protón, entonces α_0 coincide con la constante de estructura fina $\alpha \simeq 1/137$. Este problema es de interés ya que permite discutir a un átomo mésico, en el que π^- o K^- reemplaza al electrón. (a) Demuestre que la ecuación se puede escribir de la forma siguiente:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{\hbar^2\alpha_0^2}{2mr^2} - \frac{E\hbar\alpha_0}{mcr}\right)\psi_E(\boldsymbol{r}) = \frac{(E^2 - m^2c^4)}{2mc^2}\psi_E(\boldsymbol{r}). \tag{8.3}$$

(b) Demuestre que en el límite no-relativista ($E \simeq mc^2 + E_{\mathrm{NR}}$, $E\hbar\alpha_0/mc \simeq -e_1e_2$, $\alpha_0^2\hbar^2 \simeq 0$; α_0

es de orden $1/c$), se obtiene la ecuación

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{e_1 e_2}{r} \right) \psi_{E_{\rm NR}}(\boldsymbol{r}) = E_{\rm NR}\psi_{E_{\rm NR}}(\boldsymbol{r}). \tag{8.4}$$

(c) Suponga que las soluciones de (8.3) tienen la forma

$$\psi_E(\boldsymbol{r}) = Y^l_M(\Omega)\, f^l_E(r), \tag{8.5}$$

donde $\Omega \sim (\theta, \varphi)$ son las coordenadas polares de $\boldsymbol{r}$, y Y^l_M son los armónicos esféricos. Demuestre que f^l_E satisface la ecuación radial

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr} \right) f^l_E(r) - \frac{l(l+1) - \alpha_0^2}{r^2} f^l_E(r) + \frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{E^2 - m^2c^4}{2mc^2} + \frac{E\hbar\alpha_0}{mcr} \right) f^l_E(r) = 0. \tag{8.5}$$

(d) Compruebe que las siguientes sustituciones formales en la Ec. (8.5) nos proporcionan justamente su versión no-relativista, es decir, la que se obtiene de la ecuación de Schrödinger:

$$l_{\rm NR} \to \lambda \equiv \sqrt{(l+\tfrac{1}{2})^2 - \alpha_0^2} - \frac{1}{2}\,, \quad E_{\rm NR} \to \frac{E^2 - m^2c^4}{2mc^2}\,, \quad -e_1e_2 \to \frac{E\hbar\alpha_0}{mc}. \tag{8.6}$$

(e) Demuestre que

$$f^l_E(r) \underset{r\to 0}{\simeq} Ar^{\lambda} + Br^{-\lambda-1}, \tag{8.7}$$

donde λ esta definido en (8.6). (f) Demuestre el siguiente resultado: para $\alpha_0^2 < (l+\frac{1}{2})^2$ $(\lambda > -\frac{1}{2})$ la función r^λ, aun haciéndose infinita en el origen, tiene una singularidad de cuadrado integrable. Ayuda: use la siguiente definición para el producto escalar:

$$\begin{aligned} \langle\, \Psi \mid \Psi' \,\rangle &= \frac{i\hbar}{2mc^2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3\boldsymbol{r}\, \bar{\Psi}(x)\, \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t}\, \Psi'(x) = \frac{E}{mc^2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3\boldsymbol{r}\, \bar{\psi}(\boldsymbol{r})\, \psi'(\boldsymbol{r}) \\ &= \frac{E}{mc^2}\,\delta_{l,l'}\,\delta_{M,M'}\int_0^\infty dr\, r^2\, \bar{f}^l_E(r)\, f^{l'}_E(r). \end{aligned} \tag{8.8}$$

Usted también deberá demostrar la última expresión en (8.8). (g) Demuestre el siguiente resultado: para $\alpha_0^2 < (l+\frac{1}{2})^2$ $(-\lambda - 1 < -\frac{1}{2})$ la función $r^{-\lambda-1}$ no es de cuadrado integrable para $l > 0$. Nota: para $l = 0$ ambas soluciones son integrables. Finalmente, se tiene el siguiente comportamiento cuando $r \to 0$:

$$f^l_E(r) \underset{r\to 0}{\simeq} \frac{A}{\sqrt{r}}\, r^{\sqrt{(l+\frac{1}{2})^2 - \alpha_0^2}}. \tag{8.9}$$