Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
Postgrado en Física

Introducción a la Mecánica Cuántica Relativista
http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/imcr_p.html

Tarea 3
Preliminares
La ecuación de Klein-Gordon
http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/imcr_p(t3).pdf

1°) (a) Investigue sobre la densidad lagrangiana ($\mathcal{L}$) para la ecuación de Schrödinger y discuta el correspondiente tensor energía-momentum ($T_{\mu}{}^{\nu}$). Especificamente, relacione a la correspondiente densidad hamiltoniana ($\mathcal{H}$) con la componente $T_{0}{}^{0}$. Ayuda: usted podrá comprobar que la lagrangiana podría ser escrita de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\bar{\psi}\cdot\nabla\psi - \frac{\hbar}{2i}\left(\bar{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t}\right) - \bar{\psi}\,V\psi. \tag{1.1}$$

Recuerde que ψ y $\bar{\psi}$ son independientes. Siga el procedimiento hecho en clase para el campo de Klein-Gordon. (b) Demuestre que la energía del campo de Schrödinger (H) es precisamente el valor medio (o de expectación) usual del (operador) hamiltoniano de Schrödinger ($\hat{H}$). Ayuda: el hamiltoniano de Schrödinger es

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V. \tag{1.2}$$

2°) Regrese al problema 8° de la Tarea 2. (a) Haga el cambio de variables

$$r = \frac{\hbar c}{2(m^2c^4 - E^2)^{1/2}}\,\varrho \tag{2.1}$$

en la ecuación (8.5) y compruebe que se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2}{d\varrho^2}f_E^l(\varrho) + \frac{2}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}f_E^l(\varrho) - \frac{\lambda(\lambda+1)}{\varrho^2}f_E^l(\varrho) - \frac{1}{4}f_E^l(\varrho) + \frac{\nu}{\varrho}f_E^l(\varrho) = 0, \tag{2.2}$$

donde

$$\nu = \frac{E\,\alpha_0}{(m^2c^4 - E^2)^{1/2}}. \tag{2.3}$$

(b) Investigue sobre la ecuación (2.2) y compruebe que la condición que lleva a la cuantización de la energía es

$$\nu - \lambda - 1 = N = \text{entero} \geq 0, \tag{2.4}$$

de donde se obtienen los siguientes autovalores de la energía:

$$E = E(N,\lambda) = mc^2\left[1 + \frac{\alpha_0^2}{(N+\lambda+1)^2}\right]^{-1/2}. \tag{2.5}$$

(c) El límite no-relativista, con correcciones relativistas a orden más bajo en α_0, se puede obtener desarrollando en potencias de α_0 (recuerde que λ también depende de α_0). Definiendo $n = N+l+1$, demuestre que se obtiene el siguiente resultado (en el límite no-relativista):

$$E \approx mc^2 \left[1 - \frac{\alpha_0^2}{2n^2} - \frac{\alpha_0^4}{2n^4}\left(\frac{n}{l+\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\right) + \cdots\right]. \tag{2.6}$$

3°) (a) Una vez más, separe las partes radial y angular de la función de onda para la ecuación de Klein-Gordon con un potencial esfericamente simétrico. Ayuda: escriba $eA_0 = V(r)$ y $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$. Escriba la función de onda $\psi(\boldsymbol{r})$ de la siguiente manera $\psi(\boldsymbol{r}) = u(r)Y(\theta,\phi)$. Obtenga ahora las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} + l(l+1)Y = 0, \tag{3.1}$$

donde $Y = Y_{l\mu}(\theta,\phi)$ son los armónicos esféricos con $l = 0,1,2,\ldots$, y $\mu = 0,\pm1,\pm2,\ldots$. Y también

$$\left[-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]u(r) = \left[\frac{(E-V)^2 - m^2c^4}{\hbar^2c^2}\right]u(r). \tag{3.2}$$

(b) Considere el potencial para un pozo cuadrado $V = -V_0$, para $r \leq R$, y $V = 0$, para $r > R$. Encuentre soluciones normalizables de la Ec. (3.2) para $r \leq R$ y $r > R$. Ayuda: compruebe que la solución para $r \leq R$ es la función esférica de Bessel $j_l(k_{\rm i}r)$, donde $k_{\rm i} = \sqrt{(E+V_0)^2 - m^2c^4}/\hbar c$. En la región externa al pozo la solución es (otra función esférica de Bessel) $h_l^{(1)}(ikr) = j_l(ikr) + i\,n_l(ikr)$, donde $k = \sqrt{m^2c^4 - E^2}/\hbar c$. (c) Empalme estas soluciones en $r = R$ y obtenga la ecuación para los autovalores E.

4°) Use las fórmulas que definen el llamado acoplamiento minimal para escribir la densidad y la densidad de corriente en el caso que exista un campo electromagnético. Compruebe que se obtienen las fórmulas derivadas en clase. Ayuda: arranque con las formulas para ρ y $\boldsymbol{j}$:

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc}\bar{\psi}\overleftrightarrow{\partial_0}\psi\,, \quad \boldsymbol{j} = -\frac{i\hbar}{2m}\bar{\psi}\overleftrightarrow{\nabla}\psi. \tag{4.1}$$

5°) Considere la siguiente ecuación relativista independiente del tiempo:

$$\sqrt{(c\hat{p})^2 + (mc^2)^2}\,\psi(x) + \lambda\delta(x)\psi(x) = E\psi(x), \tag{5.1}$$

donde λ es la intensidad del potencial delta. Encuentre soluciones de (5.1) para las energías $-mc^2 < E < +mc^2$ (estados ligados). Ayuda: si lo desea, escriba primero a (5.1) en el espacio de los momenta. Resuelva esa ecuación y luego obtenga a $\psi(x)$.

6°) Encuentre el límite no-relativista ($v/c \to 0$) de las siguientes soluciones de la ecuación de Klein-Gordon en forma matricial (obtenidas en clase):

$$\Psi_{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{4mc^2}\sqrt{E_pL^3}}\begin{bmatrix} mc^2 \pm E_p \\ mc^2 \mp E_p \end{bmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} \mp E_pt)}. \tag{6.1}$$

Aquí tiene la respuesta:

$$\Psi_{(+)} \approx \frac{1}{\sqrt{E_p L^3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - E_p t)}, \quad \Psi_{(-)} \approx \frac{1}{\sqrt{E_p L^3}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} + E_p t)}. \tag{6.2}$$

7°) Demuestre que bajo una transformación de Galileo Galilei, $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t$, la solución $\psi'(\boldsymbol{r}', t)$ para la ecuación (no-relativista) de Schrödinger en un nuevo marco, esta relacionada con la solución $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ en el marco original por medio de la siguiente fórmula:

$$\psi'(\boldsymbol{r}', t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\left(m\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r} - \frac{1}{2}mv^2 t\right)}\psi(\boldsymbol{r}, t). \tag{7.1}$$

Note que, a diferencia del caso relativista para $v \ll c$, ψ no se transforma como un escalar.