Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
Postgrado en Física

Introducción a la Mecánica Cuántica Relativista
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/imcr_p.html`

Tarea 4
Preliminares
La ecuación de Klein-Gordon
La ecuación de Dirac
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/imcr_p(t4).pdf`

1°) Considere una partícula unidimensional de espín 0 que, aproximándose desde la izquierda, es dispersada por un potencial salto de la forma $eA^0(x) \equiv V(x) = V_0\Theta(x)$, donde $V_0 > 0$ ($\Theta(x)$ es la función de Heaviside). Además el potencial vector es nulo en todo el espacio. (a) Demuestre que la ecuación de Klein-Gordon para la parte espacial de la función de onda $\Psi(x,t) = \psi(x)\exp(-iEt/\hbar)$ tiene la forma

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = \frac{1}{\hbar^2c^2}\{(mc^2)^2 - [E - V(x)]^2\}\psi(x). \tag{1.1}$$

(b) Compruebe que una solución para este problema en las zonas I ($x < 0$) y II ($x > 0$) tiene la siguiente forma:

$$\psi_{\rm I}(x) = \psi_{\rm in}(x) + \psi_{\rm ref}(x)\,, \quad \psi_{\rm II}(x) = \psi_{\rm trans}(x), \tag{1.2}$$

donde

$$\psi_{\rm in}(x) = A\exp(ik_{\rm I}x)\,, \quad \psi_{\rm ref}(x) = B\exp(-ik_{\rm I}x)\,, \quad \psi_{\rm trans}(x) = C\exp(ik_{\rm II}x), \tag{1.3}$$

y

$$k_{\rm I} = \frac{\sqrt{E^2 - (mc^2)^2}}{\hbar c}\,, \quad k_{\rm II} = \frac{\sqrt{(E - V_0)^2 - (mc^2)^2}}{\hbar c}. \tag{1.4}$$

Las funciones $\psi_{\rm in}$, $\psi_{\rm ref}$ y $\psi_{\rm trans}$ denotan, respectivamente, las partes incidente, reflejada y transmitida, de la solución. (c) Las constantes de integración se pueden relacionar de las condiciones de continuidad impuestas sobre $\psi(x)$ y $\psi'(x)$ en $x = 0$, es decir, de las condiciones $\psi_{\rm I}(0-) = \psi_{\rm II}(0+)$ y $\psi'_{\rm I}(0-) = \psi'_{\rm II}(0+)$. Demuestre que de aquí se obtienen las siguientes relaciones:

$$B = \frac{1-r}{1+r}A\,, \quad C = \frac{2}{1+r}A, \tag{1.5}$$

donde $r = k_{\rm II}/k_{\rm I}$. (d) Demuestre que si $E > V_0 + mc^2$ se verifican los siguientes resultados: el número de onda $k_{\rm II}$ es real; la onda transmitida en la zona II es oscilante; $r > 0$; y también que

$$T \equiv \frac{j_{\rm trans}}{j_{\rm in}} = \frac{4r}{(1+r)^2}\,, \quad R \equiv -\frac{j_{\rm ref}}{j_{\rm in}} = \frac{(1-r)^2}{(1+r)^2} = 1 - T. \tag{1.6}$$

Además, es claro que los coeficientes de reflexión y transmisión obedecen $0 < R < 1$ y $0 < T < 1$, como era de esperarse. (e) Demuestre que si $V_0 - mc^2 < E < V_0 + mc^2$, y $E > mc^2$, se verifica que $k_{\rm II}$ es un número imaginario y la onda transmitida decae exponencialmente. (f) Demuestre que si $mc^2 < E < V_0 - mc^2 (\Rightarrow V_0 > 2mc^2)$, se verifica que $k_{\rm II}$ es real y la onda transmitida en la zona II es oscilante. (g) Note que en los casos tratados en (d) y (e) las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon se comportan de manera similar a las soluciones de la ecuación de Schrödinger, y se pueden interpretar como como la dispersión de una partícula de carga $+e$ en una barrera de potencial repulsiva. Sin embargo, en el caso (f) se observa una situación en cierta forma sorprendente ya que el salto de potencial debería ser impenetrable para una partícula cuántica con $E < V_0$ ¡explique esto! También demuestre que en el caso (f) se tiene que los signos de la densidad para las ondas incidente y transmitida son diferentes para $E - V_0 < 0$. Es decir, demuestre las siguientes fórmulas:

$$\rho_{\text{in}}(x) = \frac{E}{mc^2}\,|\psi_{\text{in}}(x)|^2 > 0\,(x < 0), \quad \rho_{\text{trans}}(x) = \frac{E - V_0}{mc^2}\,|\psi_{\text{trans}}(x)|^2 < 0\,(x > 0). \tag{1.7}$$

De acuerdo a este último resultado, la parte transmitida debe ser considerada como una solución de Klein-Gordon negativa cuya energía $E - V_0$ relativa al potencial V_0 es menor que cero. Explicación importante: es interesante que el caso (f) permite una interpretación físicamente sensible (y adecuada) en términos de creación de pares, a pesar que hemos arrancado con la interpretación de una sola partícula. Debemos mantener en mente que la función de onda negativa ψ_{trans} para autovalores del momentum $+\hbar k_{\text{II}}$ y energía $E - V_0 < -mc^2$, corresponde a una antipartícula de carga $-e$ viajando con momentum $-\hbar k_{\text{II}}$ desde la derecha hacia el potencial salto. Sin embargo, ya que estamos asumiendo que las partículas que se aproximan al salto vienen desde la izquierda (hacia la derecha), una (anti)partícula viniendo desde la derecha no tiene ningún sentido. Por otro lado, tenemos la libertad de escoger el signo de k_{II}, así que, reemplazando k_{II} por $-k_{\text{II}}$ la onda transmitida ψ_{trans} ahora corresponde a una antipartícula moviéndose hacia la derecha con carga $-e$ y momentum $+\hbar\,|k_{\text{II}}|$. (h) Demuestre que en este último caso se tienen los siguientes resultados:

$$T < 0\,, \quad R > 1, \tag{1.8}$$

ya que $r < 0$. Finalmente, estas últimas relaciones pueden ser interpretadas como creación de partículas-antipartículas de la siguiente manera: todas las partículas que vienen desde la izquierda son totalmente reflejadas en el salto de potencial. Adicionalmente, se crean pares partícula-antipartícula con las partículas moviéndose hacia la izquierda ($R > 1$) y las antipartículas hacia la derecha ($T < 0$). Nota: sin la interpretación que aquí hemos hecho luego de hacer el reemplazo de k_{II} por $-k_{\text{II}}$, y ya que $R > 1$ y $T < 0$, entonces se tiene una paradoja (¡se refleja más de lo que incide!). Esta es la llamada paradoja de Klein, y como hemos visto, se puede resolver. Aunque es claramente un defecto de esta teoría de una sola partícula interaccionando con un potencial externo. Nota final: podemos considerar todavía dos casos más. Si $-mc^2 < E < mc^2$ no existe una solución, en tanto se tenga un movimiento entrante de partículas hacia la derecha. Por otro lado, si $E < -mc^2$, entonces k_{II} es real y de nuevo tenemos una onda oscilante en la zona II.

2°) Considere la ecuación de Klein-Gordon con un potencial que es la componente temporal de un cuadrivector (se usa $\hbar = c = 1$):

$$(E - V)^2\psi(\boldsymbol{r}) = (-\nabla^2 + m^2)\psi(\boldsymbol{r}). \tag{2.1}$$

Si el potencial es mucho mas débil que la energía $V/E \ll 1$, muestre que esta ecuación se reduce a la ecuación de Schrödinger con el potencial reducido (dependiente de la energía)

$$U = 2EV \tag{2.2}$$

(Esto significa que uno podría usar resultados de la teoría no-relativista para aproximar la ecuación de Klein-Gordon).

3°) Otro tipo de potencial en relatividad es el escalar de Lorentz, el cual se suma a la masa (la masa es escalar porque $p_\mu p^\mu = m^2$). La ecuación de Klein-Gordon con el potencial escalar S es:

$$E^2\psi(\boldsymbol{r}) = [\hat{p} + (m+S)^2]\psi(\boldsymbol{r}). \tag{3.1}$$

Compare (3.1) con la ecuación de Schrödinger y muestre que el potencial equivalente (independiente de la energía) es

$$V = \frac{S^2 + 2mS}{2m}. \tag{3.2}$$

4°) Muestre que las cuatro matrices de Dirac (en la representación de Dirac) en verdad anticonmutan unas con otras. Defina $\hat{\gamma}_5 = i\hat{\gamma}^0\hat{\gamma}^1\hat{\gamma}^2\hat{\gamma}^3$. Demuestre las siguientes relaciones:

$$\hat{\gamma}_5^\dagger = \hat{\gamma}_5\,, \quad \hat{\gamma}_5^2 = \hat{1}\,, \quad \hat{\gamma}_5\hat{\gamma}^\mu + \hat{\gamma}^\mu\hat{\gamma}_5 = 0\,,\ \mu = 0,1,2,3. \tag{4.1}$$

Escriba en forma explícita a $\hat{\gamma}_5$ y a la matriz de espín $\hat{\boldsymbol{S}} \to \hat{S}^k = \frac{1}{2}\hbar\hat{\gamma}_5\hat{\gamma}^0\hat{\gamma}^k$, $k = 1,2,3$, ambas en la representación usual.

5°) (a) La representación de Majorana de las matrices de Dirac esta definida como sigue:

$$\hat{\gamma}^\mu_{\mathrm{Maj}} = \hat{M}\hat{\gamma}^\mu_{\mathrm{Dir}}\hat{M}^\dagger, \tag{5.1}$$

con $\hat{M} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\gamma}^0_{\mathrm{Dir}}(\hat{1} + \hat{\gamma}^2_{\mathrm{Dir}})$. Muestre que $\hat{M}$ es unitaria y hermítica. Calcule $\hat{\gamma}^0_{\mathrm{Maj}}$, $\hat{\gamma}^1_{\mathrm{Maj}}$, $\hat{\gamma}^2_{\mathrm{Maj}}$, $\hat{\gamma}^3_{\mathrm{Maj}}$ y $\hat{\gamma}^5_{\mathrm{Maj}}$ ¿Cuales de las matrices gamma son hermíticas y cuales son unitarias en la representación de Majorana? (b) La representación chiral de las matrices de Dirac esta definida por las siguientes relaciones:

$$\hat{\gamma}^0_{\mathrm{Chi}} = -(\hat{\gamma}_5)_{\mathrm{Dir}}\,, \quad \hat{\gamma}^k_{\mathrm{Chi}} = \hat{\gamma}^k_{\mathrm{Dir}}\,,\ k = 1,2,3 \tag{5.2}$$

¿Quien es $(\hat{\gamma}_5)_{\mathrm{Chi}}$? Encuentre una matriz $\hat{M}$ que efectúe la transformación desde la representación de Dirac a la representación chiral. Aquí tiene la respuesta:

$$\hat{M} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{1} + \hat{\gamma}^0\hat{\gamma}_5) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.3}$$

6°) [Problema especial] Considere la expansión de un estado $|\psi\rangle$ en la base (continua) de autovectores de algún operador $|w_\alpha\rangle$, donde $-\infty < \alpha < +\infty$,

$$|\psi\rangle = \mathbf{1}\,|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\ |w_\alpha\rangle\,\langle w_\alpha|\ |\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\ \langle\, w_\alpha \mid \psi\rangle\,|w_\alpha\rangle\,. \tag{6.1}$$

Los coeficientes de la expansión (6.1) deben ser de cuadrado integrable. Por ejemplo, si $|w_\alpha\rangle = |x\rangle$, es decir, si consideramos a los autovectores del operador X (que conforman a la llamada representación $|x\rangle$ o representación de la posición) entonces $\langle\, w_\alpha \mid \psi\rangle = \langle\, x \mid \psi\rangle = \psi(x)$ y decimos que $\psi(x)$ *es el estado en la representación de la posición*, además $\psi(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Nota: la representación de la posición resulta del isomorfismo entre $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{E}_x \subset \mathcal{E}$. De la misma forma, los autovectores del operador P son los $|w_\alpha\rangle = |p\rangle$, entonces $\langle\, w_\alpha \mid \psi\rangle = \langle\, p \mid \psi\rangle = \phi(p)$ *es el estado en la representación de los momenta* (por cierto, $\phi(p)$ es la transformada de Fourier de $\psi(x)$). (a) Encuentre los autovectores de X y P en la representación de la posición y en la representación de los momenta.

(b) Como otro ejemplo de representación, considere el siguiente operador (que interpola linealmente entre el operador posición y el operador momentum):

$$S = \alpha X + (1-\alpha)P, \tag{6.2}$$

donde $\alpha \in [0,1]$ (en la escritura de (6.2) no hemos colocado los factores de escala que permiten que X y P sean adimensionales). Supongamos que los autovectores de S son los $|w_\alpha\rangle = |s\rangle$, entonces $\langle\, w_\alpha \mid \psi\rangle = \langle\, s \mid \psi\rangle = \eta(s)$ *es el estado en esta nueva representación.* Encuentre los autovectores de S en la representación de la posición. Ayuda: para evitar un excesivo uso de los símbolos que involucran a las representaciones, es conveniente escribir el problema de autovectores y autovalores para S así:

$$S\,|\psi_s\rangle = s\,|\psi_s\rangle\,, \tag{6.3}$$

por lo tanto,

$$\langle x|\, S\,|\psi_s\rangle = \langle x|\, \alpha X + (1-\alpha)P\,|\psi_s\rangle = \alpha\,\langle x|\, X\,|\psi_s\rangle + (1-\alpha)\,\langle x|\, P\,|\psi_s\rangle = s\,\langle\, x \mid \psi_s\rangle\,, \tag{6.4}$$

donde (haciendo $\hbar = 1$)

$$\langle x|\, X\,|\psi_s\rangle = x\,\langle\, x \mid \psi_s\rangle = x\,\psi_s(x)\,, \qquad \langle x|\, P\,|\psi_s\rangle = -i\frac{d}{dx}\,\langle\, x \mid \psi_s\rangle = -i\frac{d}{dx}\psi_s(x). \tag{6.5}$$

Sustituyendo estos resultados en la expresión (6.4) se obtiene una ecuación diferencial para las autofunciones de S en la representación de la posición, $\psi_s(x)$:

$$\left[\alpha x - i(1-\alpha)\frac{d}{dx}\right]\psi_s(x) = s\,\psi_s(x). \tag{6.6}$$

Resuelva esta ecuación y obtenga el valor de la constante arbitraria en $\psi_s(x)$ de tal forma que el autovector tienda al límite correcto cuando $\alpha \to 0$ y $\alpha \to 1$ (módulo una fase global). Use algunos de los resultados obtenidos en (a). Aquí tiene la respuesta:

$$\psi_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\exp\left[i\left(\frac{s^2}{2\alpha} + \frac{\pi}{4}\right)\right]\exp\left[-\frac{i}{2}\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(x - \frac{s}{\alpha}\right)^2\right]. \tag{6.7}$$

7°) [Problema especial] Como usted sabe de su curso de Mecánica Clásica, la ecuación diferencial parcial de Hamilton-Jacobi (dependiente de una sola variable espacial y del tiempo) tiene la forma

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V(x) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \tag{7.1}$$

donde $S = S(x,t)$ es la acción y $V(x)$ es la energía potencial de la masa m. Estudiemos el problema de una partícula que se desliza hacia abajo sin rozamiento sobre un plano inclinado fijo de ángulo θ. La coordenada x mide la posición de la masa sobre el plano inclinado desde su parte más alta; en este caso el potencial gravitacional $V(x)$ tiene la forma (suponiendo que es nulo justamente en la parte más alta) $V(x) = -mgx\sin(\theta)$. (a) Suponga que la solución de (7.1) puede escribirse así

$$S(x,t) = S_1(x) + S_2(t). \tag{7.2}$$

Sustituya (7.2) en la ecuación de Hamilton-Jacobi y escriba las dos ecuaciones diferenciales ordinarias que resultan (llame α a la constante que surge de aplicar el método de separación de variables).

(b) Resuelva cada una de estas ecuaciones y sustituya sus resultados en (7.2) para obtener la acción $S(x,t)$. Note que la acción, en este caso, solo depende de dos constantes arbitrarias. (c) Según el procedimiento estándar, para obtener a partir de $S(x,t)$ la solución de la ecuación de movimiento $x(t)$, la siguiente cantidad también debe ser una constante:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \beta = \text{const.} \tag{7.3}$$

Escriba la relación (7.3) (derivando $S(x,t)$ respecto de α e igualando esta cantidad a β) y encuentre x en función del tiempo t ($x(t)$). Ayuda: le conviene escribir a $x(t)$ en términos de $x(0)$ y $\dot{x}(0)$ ¿obtuvo lo que esperaba? Nota explicatoria sobre la ecuación (7.1): de la definición de la acción se sigue que $dS/dt = L$. Si se supone que S es función de las coordenadas (q_k) y del tiempo, se tiene que $dS/dt = \partial S/\partial t + \sum_k p_k \dot{q}_k$, donde se ha hecho uso de la relación $\partial S/\partial q_k = p_k$. De manera que se puede escribir la siguiente expresión: $-\partial S/\partial t = \sum_k p_k \dot{q}_k - L \equiv H$, donde H es precisamente la hamiltoniana del sistema (para un sistema con un solo grado de libertad y siendo q la coordenada cartesiana x, se tiene que $H = p^2/2m + V(x)$).