Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
Postgrado en Física

Introducción a la Mecánica Cuántica Relativista
http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/imcr_p.html

Tarea 5
Preliminares
La ecuación de Klein-Gordon
La ecuación de Dirac
http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/imcr_p(t5).pdf

1°) En 1934, Pauli y Weisskopf reavivaron la ecuación de Klein-Gordon al insertar la carga $-e$ en j^μ e interpretando esta cantidad como la cuadridensidad de corriente cargada del electrón,

$$j^\mu = -e\frac{i\hbar}{2m}\left(\bar{\psi}\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\bar{\psi}\right). \tag{1.1}$$

Ahora, $\rho = j^0/c$ representa una densidad de carga, no una densidad de probabilidad, y de esta forma, que ρ pueda ser negativa ya no es cuestionable. En un cierto sentido, las soluciones con $E < 0$ podrían entonces ser consideradas como soluciones con $E > 0$ para partículas de carga opuesta (antipartículas). Esta interpretación es aplicable tanto para bosones como para fermiones. Existe una prescripción (propuesta por Stückelberg -1941- y Feynman -1948-) que se usa para manipular estados de energía negativa. En términos simples, la idea es que una solución de energía negativa describe a una partícula que se propaga hacia atrás en el tiempo, o equivalentemente, a una antipartícula de energía positiva que se propaga hacia adelante en el tiempo. Esta es una idea importante ya que es parte vital de los llamados diagramas de Feynman. (a) Considere un electrón libre de energía E, momentum $\boldsymbol{p}$, y carga $-e$. Demuestre que el cuadrivector corriente viene dado por:

$$j^\mu(-e) = -\frac{e}{m}\left(\frac{E}{c},\boldsymbol{p}\right)|N|^2. \tag{1.2}$$

En la demostración de este resultado se usó la función de onda $\psi = N\exp(-ip^\mu x_\mu/\hbar)$. (b) Ahora tome una antipartícula, un positrón, con la misma E y $\boldsymbol{p}$. Ya que su carga es $+e$, demuestre que

$$j^\mu(+e) = -\frac{e}{m}\left(-\frac{E}{c},-\boldsymbol{p}\right)|N|^2 \tag{1.3}$$

(esto, desde luego, es obvio). Claramente, $j^\mu(+e)$ es igual a la corriente $j^\mu(-e)$ para el electrón con $-E$, $-\boldsymbol{p}$. De esta forma, en lo que al sistema se refiere, la emisión de un positrón con energía E es lo mismo que la absorción de un electrón de energía $-E$. Graficamente,

$$\left\lceil\begin{array}{cccc} & +e & & -e \\ \uparrow & & \equiv \downarrow & \\ & E>0 & & (-E)<0 \end{array}\right\rfloor \qquad \uparrow \text{ tiempo} \tag{1.4}$$

En otras palabras, soluciones para una partícula de energía negativa que va hacia atrás en el tiempo, son equivalentes a soluciones para una antipartícula de energía positiva que va hacia adelante en el tiempo. De hecho, la razón por la que esta identificación se puede hacer es simplemente porque

$$e^{-i(-E)(-t)} = e^{-iEt}. \tag{1.5}$$

2°) (a) Como usted sabe, el (operador) hamiltoniano de Dirac viene dado por:

$$\hat{H} = c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \left(\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) + eV + mc^2\hat{\beta}. \tag{2.1}$$

Y puede también escribirse de la siguiente manera:

$$\hat{H} = c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} + mc^2\hat{\beta} - \frac{e}{c}(c\hat{\boldsymbol{\alpha}}) \cdot \boldsymbol{A} + eV \equiv \hat{H}_0 + \hat{H}', \tag{2.2}$$

donde $\hat{H}_0$ es el hamiltoniano de Dirac libre, y $\hat{H}' = -\frac{e}{c}(c\hat{\boldsymbol{\alpha}}) \cdot \boldsymbol{A} + eV$ es la parte del hamiltoniano $\hat{H}$ que lleva la interacción ¡Compruébelo! (b) La hamiltoniana clásica para una partícula (relativista) cargada moviéndose en un campo electromagnético viene dada por:

$$H = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{p} - L, \tag{2.3}$$

donde la lagrangiana L tiene la forma

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A} - eV. \tag{2.4}$$

Sustituya a (2.4) en (2.3) y compruebe que H se puede escribir como

$$H \equiv H_0 + H', \tag{2.5}$$

donde H_0 es la hamiltoniana libre, y $H' = -\frac{e}{c}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A} - eV$ es la parte de la hamiltoniana H que lleva la interacción. (c) Compare $\hat{H}'$ con H' e identifique al operador velocidad de la teoría de Dirac. Respuesta: el operador velocidad es justamente $\hat{\boldsymbol{v}} = c\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ ¡Esto no es algo esperado! (d) Obtenga el límite no-relativista de la hamiltoniana H (elimine a $\boldsymbol{v}$ haciendo uso de la definición del momentum mecanico $m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}$). Respuesta: la hamiltoniana no-relativista es

$$H - mc^2 \equiv H_{\mathrm{NR}} \approx \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \tfrac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + eV. \tag{2.6}$$

Este es claramente un resultado esperado. (e) Como es de su conocimiento, la ecuación de movimiento obedecida por un operador $\hat{A}_{\mathrm{H}}(t)$, en el marco de Heisenberg, tiene la forma (en este marco los operadores cambian en el tiempo, de allí que escribamos $\hat{A}_{\mathrm{H}}(t)$, pero el estado permanece el mismo todo el tiempo):

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_{\mathrm{H}}(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{A}_{\mathrm{H}}(t)] + e^{+i\hat{H}t/\hbar}\,\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_{\mathrm{S}}\, e^{-i\hat{H}t/\hbar}. \tag{2.7}$$

Nota: recuerde que para obtener a (2.7) uno debe usar la definición $\hat{A}_{\mathrm{H}}(t) \equiv e^{+i\hat{H}t/\hbar}\,\hat{A}_{\mathrm{S}}\, e^{-i\hat{H}t/\hbar}$. Si el operador $\hat{A}_{\mathrm{S}}$ en el marco de Schrödinger no depende explícitamente del tiempo, entonces el término más a la derecha en (2.7) es nulo. Calcule las derivadas totales respecto al tiempo (en el marco de Heisenberg, por supuesto) de los operadores posición, $\hat{\boldsymbol{r}}(t)$, y momentum mecánico, $\hat{\boldsymbol{\pi}}(t)$:

$$\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\boldsymbol{r}}(t)] + \left(\frac{\partial}{\partial t}\hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{S}}\right)_{\mathrm{H}}, \quad \frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{\pi}}(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\boldsymbol{\pi}}(t)] + \left(\frac{\partial}{\partial t}\hat{\boldsymbol{\pi}}_{\mathrm{S}}\right)_{\mathrm{H}} \tag{2.8}$$

($\hat{\boldsymbol{\pi}} \equiv \hat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}$). El Hamiltoniano de Dirac es independiente del tiempo y podemos escribirlo así:

$$\hat{H} = \hat{H}(t) = c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}}(t) + eV(\hat{\boldsymbol{r}}(t)) + mc^2\hat{\beta}, \tag{2.9}$$

ya que, $\hat{H}(t) = \hat{H}_{\mathrm{H}}(t) = \hat{H}_{\mathrm{S}} = \hat{H}$. Ayuda: aquí tiene la respuesta:

$$\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{r}}(t) = c\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{\pi}}(t) = \frac{e}{c}(c\hat{\boldsymbol{\alpha}}) \times \boldsymbol{B}(\hat{\boldsymbol{r}}(t)) + e\boldsymbol{E}(\hat{\boldsymbol{r}}(t)), \tag{2.10}$$

donde $\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$, y $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$. En la demostración de los resultados en (2.10) deberá hacer uso de la relación fundamental $[\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}$, que es válida en el marco de Schrödinger, y en el de Heisenberg para tiempos iguales. Nota final: los resultados en (2.10) confirman que el operador velocidad de la teoría de Dirac es precisamente $c\hat{\boldsymbol{\alpha}}$.

3°) [Problema especial] Un pión (π) en reposo, decae en un muón (μ) más un neutrino (ν) ¿Cual es la velocidad del muón? Resuelva el problema usando notación cuadridimensional (y la ley $p^\alpha p_\alpha = m^2c^2$). Ayuda: le daré pistas generales para obtener la solución. Las energías de las partículas vienen dadas por:

$$E_\pi = m_\pi c^2, \quad E_\mu = c\sqrt{m_\mu^2 c^2 + \boldsymbol{p}_\mu^2}, \quad E_\nu = |\, \boldsymbol{p}_\nu \,|\, c = |\, \boldsymbol{p}_\mu \,|\, c, \tag{3.1}$$

donde $\boldsymbol{p}_\pi = \boldsymbol{p}_\mu + \boldsymbol{p}_\nu$, de la conservación del momentum. Por supuesto, $\boldsymbol{p}_\pi = 0$, por lo tanto, $\boldsymbol{p}_\mu = -\boldsymbol{p}_\nu$. Además, $E_\pi = E_\mu + E_\nu$, de la conservación de la energía. Sustituyendo las expresiones de (3.1) en la ecuación para la conservación de la energía, se obtiene la siguiente fórmula para el momentum del muón:

$$|\, \boldsymbol{p}_\mu \,| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi}c^2. \tag{3.2}$$

Y su energía es

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi}c^2. \tag{3.3}$$

Una vez que se sabe el momentum y la energía del muón, su velocidad se obtiene de usar las fórmulitas $E_\mu = \gamma m_\mu c^2$ y $\boldsymbol{p}_\mu = \gamma m_\mu \boldsymbol{v}_\mu$, donde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, como es usual. Finalmente,

$$\boldsymbol{v}_\mu = \frac{\boldsymbol{p}_\mu c^2}{E_\mu} \Rightarrow |\, \boldsymbol{v}_\mu \,| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2}c \approx 0,271c. \tag{3.4}$$

Obtenga este resultado usando la conservación de la energía y el momentum en forma cuadridimensional: $(p_\pi)^\alpha = (p_\mu)^\alpha + (p_\nu)^\alpha$ ¡Note que α es el índice cuadridimensional! Otra ayuda: arranque con $(p_\nu)^\alpha = (p_\pi)^\alpha - (p_\mu)^\alpha$. Calcule $(p_\nu)^\alpha (p_\nu)_\alpha$ y use los siguientes resultados ¡obténgalos usted mismo!:

$$(p_\nu)^\alpha (p_\nu)_\alpha \equiv p_\nu^2 = 0 \quad p_\pi^2 = m_\pi^2 c^2, \quad p_\mu^2 = m_\mu^2 c^2, \quad (p_\pi)^\alpha (p_\mu)_\alpha \equiv p_\pi p_\mu = m_\pi E_\mu. \tag{3.5}$$

Esto le dará la formulita (3.3). Repita el mismo procedimiento con $(p_\mu)^\alpha = (p_\pi)^\alpha - (p_\nu)^\alpha$ para obtener la formulita (3.2).

4°) [Problema especial] La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi, \tag{4.1}$$

puede escribirse de la siguiente manera:

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\psi = Q, \tag{4.2}$$

donde

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad Q \equiv \frac{2m}{\hbar^2}V\psi. \tag{4.3}$$

Note que la Ec. (4.2) tiene la forma de la ecuación de Helmholtz, sin embargo, Q también depende de ψ. Suponga que se pudiera encontrar una función $G(\boldsymbol{r})$ que es solución de la ecuación de Helmholtz con la delta de Dirac como término inhomogéneo:

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)G(\boldsymbol{r}) = \delta^3(\boldsymbol{r}). \tag{4.4}$$

Entonces podríamos expresar a la solución de (4.2) como la siguiente integral:

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \int d^3\boldsymbol{r}_0\, G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)Q(\boldsymbol{r}_0). \tag{4.5}$$

(a) Demuestre esto, es decir, demuestre que la solución (4.5) satisface la Ec. (4.2). La función $G(\boldsymbol{r})$ es la llamada función de Green para la ecuación de Helmholtz. (b) Halle una solución de la Ec. (4.4). Ayuda: suponga que la solución que busca tiene la forma

$$G(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3\boldsymbol{s}\, g(\boldsymbol{s})\, e^{i\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{r}}. \tag{4.6}$$

Aplique sobre esta solución el operador $\nabla^2 + k^2$ e iguale con la delta de Dirac $\delta^3(\boldsymbol{r})$ (esa es precisamente la Ec. (4.4)). Use

$$\delta^3(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\boldsymbol{s}\, e^{i\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{r}}. \tag{4.7}$$

Encuentre a $g(\boldsymbol{s})$ y luego a $G(\boldsymbol{r})$. Aquí tiene la respuesta:

$$G(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\boldsymbol{s}\, \frac{1}{k^2 - s^2}\, e^{i\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{r}}. \tag{4.8}$$

(c) Demuestre que, luego de hacer la integral en (4.8), se obtiene el siguiente resultado:

$$G(\boldsymbol{r}) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}. \tag{4.9}$$

(d) Demuestre por diferenciación directa que la solución (4.9), en efecto, satisface la Ec. (4.4). Ayuda: use el siguiente resultado

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{r}) \tag{4.10}$$

¡Demuestre también este último resultado! Regresando a la Ec. (4.5), demuestre que la solución general de la ecuación de Schrödinger toma la forma

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \psi_0(\boldsymbol{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3\boldsymbol{r}_0\,\frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}}{|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0\,|}\,V(\boldsymbol{r}_0)\psi(\boldsymbol{r}_0), \tag{4.11}$$

donde ψ_0 satisface la ecuación de Schrödinger libre, es decir,

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\psi_0 = 0. \tag{4.12}$$

La ecuación (4.11) es la llamada forma integral de la ecuación de Schrödinger, y es completamente equivalente a su versión diferencial. La forma integral es muy útil cuando se analizan problemas de escátering.