Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
Postgrado en Física

Introducción a la Mecánica Cuántica Relativista
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/imcr_p.html`

Tarea 6
Preliminares
La ecuación de Dirac
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/imcr_p(t6).pdf`

1°) Usualmente se dice que, "ya que

$$\Delta x \sim \frac{\hbar}{\Delta p} \sim \frac{\hbar}{mc}, \tag{1.1}$$

una partícula relativista no puede ser localizada mas precisamente que $\sim \hbar/mc$, en caso contrario se crean pares de partículas para $E > 2mc^2$". A continuación le diré como demostrar (1.1) sin hacer uso del principio de incertidumbre de Heisenberg. Esta demostración, en mi opinión, es notable [Se obtuvo por primera vez en: Phys. Rev. A **79**, 044101 (2009)]. Considere la ecuación de Dirac unidimensional independiente del tiempo,

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)\,, \quad \hat{H} = -i\hbar c\hat{\alpha}\frac{d}{dx} + mc^2\hat{\beta} + V(x), \tag{1.2}$$

donde $\psi(x)$ es una función de onda de dos componentes, c es la velocidad de la luz, m es la masa en reposo de la partícula, y $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son las matrices 2×2 de Dirac. El potencial $V(x)$ es real e independiente del tiempo. (a) Use la siguiente representación de las matrices de Dirac:

$$\hat{\alpha} = \hat{\sigma}_y\,, \quad \hat{\beta} = \hat{\sigma}_z, \tag{1.3}$$

y demuestre que la Eq. (1.2) se puede escribir así:

$$-\hbar c\, v_x + mc^2 u + Vu = Eu\,, \quad \hbar c\, u_x - mc^2 v + Vv = Ev, \tag{1.4}$$

donde $\psi = \bar{\psi} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, $u_x = du/dx$, y $v_x = dv/dx$ ¡note que, por culpa de (1.3), la función de onda es real! (b) Demuestre que a partir de las Ecs. (1.4) se obtiene la siguiente relación:

$$uv = \frac{\hbar}{2mc}(uu_x + vv_x) = \frac{\hbar}{4mc}\frac{d}{dx}(\psi^\dagger\psi). \tag{1.5}$$

(c) Use (1.5) y demuestre la siguiente relación:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x\, uv = \frac{\hbar}{4mc}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x\, \frac{d}{dx}(\psi^\dagger\psi) = -\frac{\hbar}{4mc}. \tag{1.6}$$

En realidad, para obtener el resultado anterior usted deberá suponer que ψ esta normalizado: $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^\dagger\psi = 1$ (lo que puede lograrse si $\psi(x \to \pm\infty) = 0$). (d) Use ahora la desigualdad $\psi^\dagger\psi =$

$u^2 + v^2 \geq 2\,|uv|$ (¿por qué esta desigualdad es cierta?), también el resultado (1.6), y demuestre que se verifica la siguiente desigualdad:

$$\langle |x| \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x\, \psi^\dagger \psi \geq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x\, 2uv \right| = \frac{\hbar}{2mc}. \tag{1.7}$$

(e) Use ahora la definición $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$ (si suponemos que el potencial es simétrico, $V(x) = V(-x)$, entonces $\psi^\dagger \psi$ también es una expresión simétrica, por lo tanto $\langle x \rangle = 0$ ¡demuéstrelo!), y también la desigualdad de Cauchy-Schwarz $\langle x^2 \rangle = \langle |x|^2 \rangle \geq \langle |x| \rangle^2$ (¡compruébelo!) para demostrar finalmente el resultado buscado

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2mc} \sim \frac{\hbar}{mc}. \tag{1.8}$$

2°) Considere la ecuación de Dirac unidimensional:

$$-i\hbar c\, \hat{\alpha} \frac{d}{dx} \psi + mc^2 \hat{\beta} \psi = (E - V)\psi, \tag{2.1}$$

donde

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

y ψ es una función de onda de dos componentes,

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Estamos interesados en encontrar condiciones de frontera apropiadas para la función de onda ψ cuando el potencial es una delta de Dirac: $V(x) = g\delta(x)$. (a) Integre la ecuación (2.1) desde $-\epsilon$ a $+\epsilon$ y luego tome el límite $\epsilon \to 0$, es decir,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left[-i\hbar c\, \hat{\alpha} \left(\psi(+\epsilon) - \psi(-\epsilon) \right) + mc^2 \hat{\beta} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} dx\, \psi(x) \right] = \lim_{\epsilon \to 0} \left[E \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} dx\, \psi(x) - g \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} dx\, \delta(x) \psi(x) \right]. \tag{2.4}$$

Note que el primer término a la izquierda es prácticamente el salto que presenta ψ en $x = 0$. El siguiente término a su derecha es nulo y también el término que tiene a E. Nos queda solo el término con la delta, y que debería reportar la discontinuidad de la función ψ en $x = 0$ (ya que esta igualado con el primer término a la izquierda). Debido a esto, el procedimiento usual ha sido suponer que la integral con la delta tiene la siguiente forma:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} dx\, \delta(x) \psi(x) \equiv \frac{1}{2} \left(\psi(0+) + \psi(0-) \right) \tag{2.5}$$

(hemos usado la notación $\psi(\pm) = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \psi(\pm\epsilon)$). Ahora demuestre que (2.4) y (2.5) nos conducen a la siguiente condición de frontera:

$$\frac{\psi_1(0+)}{\psi_1(0-)} = \frac{1 - i\frac{g}{2\hbar c}}{1 + i\frac{g}{2\hbar c}} = \exp(-i\varphi)\,, \quad \frac{\psi_2(0+)}{\psi_2(0-)} = \frac{1 + i\frac{g}{2\hbar c}}{1 - i\frac{g}{2\hbar c}} = \exp(+i\varphi), \tag{2.6}$$

donde $\tan(\varphi/2) = g/2\hbar c$. La condición de frontera (2.6) no es completamente adecuada ya que la fórmula (2.5) no siempre es cierta. (b) Existe otra manera de encontrar una condición de frontera para el potencial delta de Dirac (esta condición sí parece ser adecuada). En efecto, ya que la delta es un potencial muy "intenso", su presencia es dominante en la ecuación (2.1). Así que, podemos escribir a (2.1) en la siguiente forma:

$$-i\hbar c\,\hat{\alpha}\frac{d}{dx}\psi \sim -V\psi. \tag{2.7}$$

Rearregle esta última expresión y escríbala en la forma de dos ecuaciones diferenciales

$$\frac{1}{\psi_1}\frac{d}{dx}\psi_1 \sim -i\frac{1}{\hbar c}V\,, \quad \frac{1}{\psi_2}\frac{d}{dx}\psi_2 \sim +i\frac{1}{\hbar c}V. \tag{2.8}$$

Ahora integre, como se hizo antes, y use la relación

$$\int_{0-}^{0+} dx\, V(x) = g. \tag{2.9}$$

Se obtiene finalmente la condición de frontera para el potencial delta:

$$\frac{\psi_1(0+)}{\psi_1(0-)} = \exp\left(-i\frac{g}{\hbar c}\right)\,, \quad \frac{\psi_2(0+)}{\psi_2(0-)} = \exp\left(+i\frac{g}{\hbar c}\right). \tag{2.10}$$

O mejor, en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \psi_1(0+) \\ \psi_2(0+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp\left(-i\frac{g}{\hbar c}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(+i\frac{g}{\hbar c}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1(0-) \\ \psi_2(0-) \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

(c) Otra manera de obtener este último resultado es la siguiente. Considere la siguiente representación del potencial delta de Dirac:

$$V(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{g}{2\epsilon}\left(\Theta(x+\epsilon) - \Theta(x-\epsilon)\right). \tag{2.12}$$

Esta función es una barrera cuadrada de potencial que es más y más estrecha, y alta, a medida que $\epsilon \to 0$. Resuelva la ecuación de Dirac con el potencial (2.12) y luego tome el límite $\epsilon \to 0$.

3°) (a) Demuestre que la cantidad bilineal $\bar{\psi}\psi$ se transforma como un escalar de Lorentz (como es usual, $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ es la adjunta de ψ). (b) Demuestre que $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ es un vector de Lorentz. (c) Demuestre que $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$ se transforma como un tensor de Lorentz de rango dos. (d) Demuestre que $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ es un escalar de Lorentz, pero además, cambia de signo en una reflexión; es decir, $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ es una cantidad seudoescalar. (e) Demuestre que $\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$ se transforma como un vector de Lorentz, pero además, las componentes espaciales no cambian de signo bajo una reflexión mientras que la componente temporal si cambia de signo; es decir, $\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$ es un seudovector.

4°) [Problema especial] (a) Considere el problema de una partícula de Dirac en un potencial salto: $U(x) = V_0\Theta(x)$ $(x \in (-\infty, +\infty))$, donde $\Theta(x)$ es la función de Heaviside. Supongamos que la función de onda asociada a la partícula, $\psi = \psi(x,t)$, es normalizable, es decir, $\psi(x \to \pm\infty, t) = 0$ (de hecho, supondremos que la norma de ψ es igual a uno, es decir, $\|\psi\|^2 \equiv \langle\, \psi \mid \psi\,\rangle = 1$). El operador fuerza clásica externa es

$$\hat{f} = -\frac{d}{dx}U(x) = -V_0\delta(x), \tag{4.1}$$

donde $\delta(x) = d\Theta(x)/dx$ es la función delta de Dirac. Claramente, el valor medio de $\hat{f}$ en el estado ψ se puede evaluar como sigue:

$$\langle \hat{f} \rangle_\psi = \langle\, \psi \mid \hat{f} \mid \psi \,\rangle = -V_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^\dagger(x,t)\delta(x)\psi(x,t) = -V_0\psi^\dagger(0,t)\psi(0,t). \tag{4.2}$$

Deseamos demostrar este último resultado de otra manera. Use el siguiente procedimiento: (i) multiplique (apropiadamente) la ecuación de Dirac dependiente del tiempo para la función ψ por $\partial\psi^\dagger/\partial x$, y la ecuación para $\psi^\dagger$ por $\partial\psi/\partial x$, luego sume las dos ecuaciones resultantes; (ii) integre el resultado obtenido en (i) alrededor de $x = 0$ ¿Qué resultado obtuvo? Ayuda: aquí tiene la respuesta:

$$-\int_{0-}^{0+} dx\, U'\psi^\dagger\psi = -\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, U'\psi^\dagger\psi = \langle \hat{f} \rangle_\psi = -mc^2 \left[\, \psi^\dagger\hat{\beta}\psi \,\right]\Big|_{0-}^{0+} - \left[\, U\psi^\dagger\psi \,\right]\Big|_{0-}^{0+}, \tag{4.3}$$

donde $0\pm \equiv \lim_{\epsilon\to 0}(0 \pm \epsilon)$. Use ahora los siguientes resultados:

$$(\psi^\dagger\hat{\beta}\psi)(0+,t) = (\psi^\dagger\hat{\beta}\psi)(0-,t)\,, \quad (\psi^\dagger\psi)(0+,t) = (\psi^\dagger\psi)(0-,t) \equiv (\psi^\dagger\psi)(0,t) \tag{4.4}$$

(¿por qué estas fórmulas son viables? ¿será que la función de onda satisface la condición de frontera periódica alrededor de $x = 0$?), y también

$$U(0+) = V_0\,, \quad U(0-) = 0. \tag{4.5}$$

Sustituyendo las fórmulas (4.4) y (4.5) en el resultado (4.3) se obtiene precisamente el resultado (4.2):

$$\langle \hat{f} \rangle_\psi = -V_0(\psi^\dagger\psi)(0,t). \tag{4.6}$$

(b) Repita todo este procedimiento, pero esta vez considere la ecuación de Schrödinger. Note que existen algunas diferencias con relación al procedimiento que nos llevó a la fórmula (4.3). Le estoy proponiendo que estudie y resuelva esto. Ayuda: multiplique la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para la función ψ por $\partial\bar{\psi}/\partial x$, y la ecuación para $\bar{\psi}$ por $\partial\psi/\partial x$. (c) Igual que en (b), pero esta vez considere la ecuación de Klein-Gordon.