Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
Postgrado en Física

Introducción a la Mecánica Cuántica Relativista
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/imcr_p.html`

Tarea 7
Preliminares
La ecuación de Dirac
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/imcr_p(t7).pdf`

1°) Considere la ecuación de Dirac para una partícula de masa m en una dimensión en las unidades $\hbar = c = 1$:

$$\hat{H}\psi = E\psi\,, \quad \hat{H} = \hat{\alpha}\hat{p} + m\hat{\beta} + U, \tag{1.1}$$

donde $\hat{p} = -id/dx$, y $\psi = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ es una función de onda de dos componentes. Use la siguiente representación:

$$\hat{\alpha} = \hat{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\beta} = \hat{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

La ventaja de esta representación es que ψ puede ser escogida real. Suponga que el potencial U es una combinación de un escalar de Lorentz S y la componente temporal de un divector V (que es el potencial más usual), es decir,

$$U = \hat{\beta}S + V. \tag{1.3}$$

(a) Demuestre que u y v satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-v' + (m + S + V)u = Eu, \tag{1.4}$$

$$u' + (-m - S + V)v = Ev, \tag{1.5}$$

donde la prima indica la primera derivada. (b) Suponga que existen dos soluciones de estado ligado, $\psi_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$ y $\psi_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$, con autovalores E_1 y E_2, respectivamente. Calcule la siguiente cantidad: [Ec. (1.4) para ψ_1]$\times u_2$ − [Ec. (1.4) para ψ_2]$\times u_1$, y recuerde que las u y las v son reales. Deberá obtener la siguiente ecuación:

$$u_1 v_2' - v_1' u_2 = (E_1 - E_2) u_1 u_2, \tag{1.6}$$

y similarmente, a partir de la Ec. (1.5) obtenga la siguiente ecuación:

$$u_1' v_2 - v_1 u_2' = (E_1 - E_2) v_1 v_2. \tag{1.7}$$

(c) Demuestre que las ecuaciones (1.6) y (1.7) se pueden combinar para dar

$$\frac{d}{dx}(u_1 v_2 - v_1 u_2) = (E_1 - E_2)(u_1 u_2 + v_1 v_2) = (E_1 - E_2)\psi_1^\dagger \psi_2. \tag{1.8}$$

(d) Demuestre que si $E_1 = E_2$, de la ec. (1.8) se obtiene que $u_1 v_2 - v_1 u_2 =$ constante. Esta constante debe ser zero porque las us y las vs se anulan cuando $x \to \pm\infty$, por lo tanto,

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} \tag{1.9}$$

¡Demuéstrelo! (e) Compruebe que la razón u/v se relaciona con u'/u debido a la Ec. (1.5), es decir, $u'/u = (E + m + S - V)(v/u)$. Ahora demuestre que la Ec. (1.9) nos lleva a la relación

$$\frac{u'_1}{u_1} = \frac{u'_2}{u_2}. \tag{1.10}$$

(f) Finalmente, demuestre a partir de las Ecs. (1.9) y (1.10) que ψ_1 y ψ_2 difieren solo por un factor multiplicativo constante, así que estos estados son realmente el mismo estado. Nota: la conclusión es que un sistema unidimensional regido por la ecuación de Dirac en 1+1 dimensiones no tiene estados degenerados. Este resultado es el teorema de no-degeneración para la mecánica cuántica de Dirac en una dimensión. (g) Demuestre a partir de la Ec. (1.8) que, si $E_1 \neq E_2$ entonces

$$\langle\, \psi_1 \mid \psi_2 \,\rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi_1^\dagger \psi_2 = 0, \tag{1.11}$$

es decir, ψ_1 y ψ_2 son ortogonales.

2°) Escriba la ecuación de Dirac en una representación en la cual no haya coeficientes imaginarios (esto lo hizo Ettore Majorana en 1937). Ayuda: en la representación estándard (o de Dirac), las únicas cantidades imaginarias presentes en la ecuación de Dirac

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{\alpha}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\alpha}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\alpha}_z \frac{\partial}{\partial z} + im\hat{\beta}\right)\psi = 0 \tag{2.1}$$

son las matrices $\hat{\alpha}_y$ y $i\hat{\beta}$ (¡compruebe esto!). Esta complejidad podría ser eliminada por la transformación $\psi' = \hat{U}\psi$, donde

$$\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\alpha}_y + \hat{\beta}) = \hat{U}^{-1}; \tag{2.2}$$

entonces, $\hat{\alpha}'_x = \hat{U}\hat{\alpha}_x\hat{U} = -\hat{\alpha}_x$, $\hat{\alpha}'_y = \hat{\beta}$, $\hat{\alpha}'_z = -\hat{\alpha}_z$ y $\hat{\beta}' = \hat{\alpha}_y$ (¡compruebe estas relaciones!). De esta forma, la ecuación de Dirac se convierte en

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \hat{\alpha}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\beta} \frac{\partial}{\partial y} - \hat{\alpha}_z \frac{\partial}{\partial z} + im\hat{\alpha}_y\right)\psi' = 0, \tag{2.3}$$

en la cual todos los coeficientes son reales.

3°) Como se demostró en clase, la ecuación de Dirac para una partícula (de espín $\frac{1}{2}$) en un campo electromagnético acoplado minimalmente es

$$\left[\hat{\gamma}^\mu \left(\hat{p}_\mu - \frac{e}{c} A_\mu\right) - mc\right]\psi = 0. \tag{3.1}$$

(a) Demuestre usted que (3.1) se puede escribir de la siguiente forma (esta ecuación es usualmente llamada la ecuación de Dirac de segundo orden):

$$\left[\left(\hat{p}^\mu - \frac{e}{c}A^\mu\right)\left(\hat{p}_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right) - \frac{e\hbar}{2c}\hat{\sigma}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - m^2c^2\right]\psi = 0, \tag{3.2}$$

donde

$$\hat{\sigma}^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu]\,, \quad F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{3.3}$$

Ayuda: multiplique a (3.1) por la izquierda por el operador $\hat{\gamma}^\nu\left(\hat{p}_\nu - \frac{e}{c}A_\nu\right) + mc$ y use la relación de anticommutación de las matrices gamma, $\{\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. Desarrolle el producto y obtenga la siguiente expresión:

$$\left[\left(\hat{p}^\mu - \frac{e}{c}A^\mu\right)\left(\hat{p}_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right) - \frac{e}{2c}[\hat{\gamma}^\nu, \hat{\gamma}^\mu](\hat{p}_\nu A_\mu) - m^2c^2\right]\psi = 0. \tag{3.4}$$

En el término $(\hat{p}_\nu A_\mu)$ se entiende que $\hat{p}_\nu$ actúa solo sobre A_μ y no sobre ψ. Use ahora $\hat{p}_\mu = i\hbar\partial_\mu$ y también

$$\hat{\sigma}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu](\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = i(\hat{\gamma}^\mu\hat{\gamma}^\nu\partial_\mu A_\nu - \hat{\gamma}^\nu\hat{\gamma}^\mu\partial_\mu A_\nu) = i[\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu]\partial_\mu A_\nu \tag{3.5}$$

(¡demuéstre esto!) y obtenga finalmente el resultado (3.2). (b) Exprese $\hat{\sigma}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ en términos de los campos electromagnéticos **E** y **B** en la representación de Dirac. Ayuda: use la antisimetría de $\hat{\sigma}^{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu}$ así como la forma explícita de $F_{\mu\nu}$,

$$[F_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

y también los siguientes resultados,

$$\hat{\sigma}^{0i} = i\hat{\alpha}_i\,, \quad \hat{\sigma}^{ij} = \epsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k\,, \quad \hat{\sigma}_k = \begin{bmatrix} (\hat{\sigma}_k)_\mathrm{P} & 0 \\ 0 & (\hat{\sigma}_k)_\mathrm{P} \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

donde las $(\hat{\sigma}_k)_\mathrm{P}$ son las matrices de Pauli. Aquí tiene el resultado:

$$\hat{\sigma}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(i\hat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\mathbf{E} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{B}). \tag{3.8}$$

Nota final: al comparar la ec. (3.2) con la ecuación de Klein-Gordon, es claro que solo se diferencian por la presencia en (3.2) del término con $\hat{\sigma}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Ese término es precisamente un término de acoplamiento entre el espín de la partícula y el campo electromagnético. Es de mencionarse que las soluciones de la ec. (3.2) incluyen, de hecho, soluciones redundantes que no satisfacen la ecuación original de primer orden (3.1) (estas son soluciones de (3.1) pero con el signo opuesto de m). Sin embargo, la escogencia de las soluciones apropiadas es, usualmente, obvio. Un procedimiento típico es que, si ϕ es cualquier solución de la ecuación de segundo orden, entonces una solución de la ecuación correcta de primer orden es

$$\psi = \left[\hat{\gamma}^\mu\left(\hat{p}_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right) + mc\right]\phi. \tag{3.9}$$

En efecto, multiplicando esta ecuación por $\hat{\gamma}^\nu\left(\hat{p}_\nu - \frac{e}{c}A_\nu\right) - mc$, vemos que el lado derecho se anula ya que ϕ satisface la ecuación (3.2). Es decir, se obtiene que ψ satisface la ecuación de Dirac usual (3.1).

4°) Determine los niveles de energía de un electrón en un campo magnético constante. Ayuda: considere el potencial vector $A_x = A_z = 0$, y $A_y = Bx$ (el campo magnético entonces se encuentra en el eje z). Las componentes p_y y p_z del momentum generalizado (así como la energía) son cantidades conservadas. Use la ecuación (3.2) del ejercicio anterior y asuma que la solución (por ejemplo, ϕ) es autofunción de $\hat{\sigma}_z$ (con autovalores $\sigma = \pm 1$) y de los operadores $\hat{p}_y$ y $\hat{p}_z$. La ecuación para ϕ es:

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + (eBx - p_y)^2 - eB\sigma\right]\phi = (\varepsilon^2 - m^2 - p_z^2)\phi\,, \quad \hbar = c = 1. \tag{4.1}$$

Por su forma, esta ecuación es la misma que la ecuación de Schrödinger para el oscilador lineal. Los autovalores se determinan de la fórmula siguiente:

$$\varepsilon^2 - m^2 - p_z^2 = |e|\,B(2n+1) - eB\sigma\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{4.2}$$

La función de onda ψ, la cual se determina a partir de ϕ usando la fórmula (3.9) del ejercicio anterior, no es autofunción de $\hat{\sigma}_z$; este hecho esta de acuerdo con la afirmación que el espín no es una cantidad conservativa para una partícula en movimiento.

5°) Como se discutió en clase, una transformación de Lorentz es cualquier transformación que deja la longitud de los cuadrivectores invariante. Por ejemplo, para el cuadrivector posición escribimos $x \equiv \sqrt{x_\mu x^\mu} =$ inv. En general, una transformación Λ la cual opera sobre el espacio de los cuadrivectores puede ser escrita así: $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ ($\Rightarrow x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x'^\nu$). El requisito que la longitud de un cuadrivector permanezca invariante nos lleva a la siguiente condición sobre Λ:

$$\delta^\mu{}_\nu = \Lambda_\alpha{}^\mu \Lambda^\alpha{}_\nu. \tag{5.1}$$

Demuestre a partir de esta ecuación que $\det(\Lambda) = \pm 1$, y por lo tanto que para toda transformación de Lorentz (homogenea) existe una transformación inversa.