Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
Postgrado en Física

Introducción a la Mecánica Cuántica Relativista
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/imcr_p.html`

Tarea 8
Preliminares
La ecuación de Dirac
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/imcr_p(t8).pdf`

1°) Como se demostró en clase, los generadores (matrices 4×4) de una transformación de Lorentz propia infinitesimal, $\hat{\sigma}_{\alpha\beta}$, deben satisfacer la siguiente relación:

$$2i(\delta^{\nu}{}_{\alpha}\hat{\gamma}_{\beta} - \delta^{\nu}{}_{\beta}\hat{\gamma}_{\alpha}) = [\,\hat{\gamma}^{\nu}, \hat{\sigma}_{\alpha\beta}\,]. \tag{1.1}$$

(a) Demuestre que

$$\hat{\sigma}_{\alpha\beta} \equiv \frac{i}{2}[\,\hat{\gamma}_{\alpha}, \hat{\gamma}_{\beta}\,] \tag{1.2}$$

satisface la relación (1.1). (b) Encuentre las seis componentes de $\hat{\sigma}_{\alpha\beta}$ en la representación de Dirac. Ayuda: aquí tiene la respuesta:

$$\hat{\sigma}^{0i} = i\hat{\alpha}_i\,, \quad \hat{\sigma}^{ij} = \epsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k\,, \quad \hat{\sigma}_k = \begin{bmatrix} (\hat{\sigma}_k)_{\mathrm{P}} & 0 \\ 0 & (\hat{\sigma}_k)_{\mathrm{P}} \end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

donde las $(\hat{\sigma}_k)_{\mathrm{P}}$ son las matrices de Pauli.

2°) (a) Como se discutió en clase, en la representación estándar, o de Dirac, o de Dirac-Pauli, las matrices $\hat{\alpha}_k$ y $\hat{\beta}$ vienen dadas por:

$$\hat{\alpha}_k = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\sigma}_k \\ \hat{\sigma}_k & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

donde $k = 1, 2, 3.$ y las $\hat{\sigma}_k$ son las matrices (2×2) de Pauli. En consecuencia, las matrices gamma vienen dadas por:

$$\hat{\gamma}^0 \equiv \hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{bmatrix}, \quad \hat{\gamma}^k \equiv \hat{\beta}\hat{\alpha}_k = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\sigma}_k \\ -\hat{\sigma}_k & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

(b) En la representación de Weyl, o representación espinorial (que también es -esencialmente- la llamada representación quiral), las matrices $\hat{\alpha}_k$ y $\hat{\beta}$ vienen dadas por:

$$\hat{\alpha}_k = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_k & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}_k \end{bmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{1} \\ \hat{1} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

(algunos autores definen a $\hat{\alpha}_k$ en la representación quiral como menos la $\hat{\alpha}_k$ en (2.3), pero a veces se deja a $\hat{\alpha}_k$ tal y como esta en (2.3) y a $\hat{\beta}$ se le cambia el signo). En consecuencia, las matrices gamma vienen dadas por:

$$\hat{\gamma}^0 \equiv \hat{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{1} \\ \hat{1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\gamma}^k \equiv \hat{\beta}\hat{\alpha}_k = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\sigma}_k \\ \hat{\sigma}_k & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Compruebe que la representación de Weyl podría relacionarse con la representación estándar por una transformación de similaridad unitaria ($\psi_{\mathrm{w}} = \hat{S}\psi_{\mathrm{e}}$, $\hat{\gamma}^\mu_{\mathrm{w}} = \hat{S}\hat{\gamma}^\mu_{\mathrm{e}}\hat{S}^{-1}$, etc.) con

$$\hat{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & -\hat{1} \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Compare este último resultado con el obtenido en el problema 5°, parte (b), Tarea 4. (c) En la representación supersimétrica, las matrices $\hat{\alpha}_k$ y $\hat{\beta}$ vienen dadas por:

$$\hat{\alpha}_k = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\sigma}_k \\ \hat{\sigma}_k & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -i\hat{1} \\ i\hat{1} & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

En consecuencia, las matrices gamma vienen dadas por:

$$\hat{\gamma}^0 \equiv \hat{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -i\hat{1} \\ i\hat{1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\gamma}^k \equiv \hat{\beta}\hat{\alpha}_k = \begin{bmatrix} -i\hat{\sigma}_k & 0 \\ 0 & i\hat{\sigma}_k \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Compruebe que la representación supersimétrica podría relacionarse con la representación estándar por una transformación de similaridad unitaria con

$$\hat{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \hat{1} & i\hat{1} \\ i\hat{1} & \hat{1} \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

(d) En la representación de Majorana, las matrices $\hat{\alpha}_k$ y $\hat{\beta}$ vienen dadas por:

$$\hat{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\sigma}_1 \\ -\hat{\sigma}_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{bmatrix}, \quad \hat{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\sigma}_3 \\ -\hat{\sigma}_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

En consecuencia, las matrices gamma ($\hat{\gamma}^0 \equiv \hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}^k \equiv \hat{\beta}\hat{\alpha}_k$, $k = 1, 2, 3.$) vienen dadas por:

$$\hat{\gamma}^0 = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\gamma}^1 = \begin{bmatrix} i\hat{\sigma}_3 & 0 \\ 0 & i\hat{\sigma}_3 \end{bmatrix}, \quad \hat{\gamma}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\gamma}^3 = \begin{bmatrix} -i\hat{\sigma}_1 & 0 \\ 0 & -i\hat{\sigma}_1 \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Compruebe que la representación de Majorana podría relacionarse con la representación estándar por una transformación de similaridad unitaria con

$$\hat{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\gamma}^0(\hat{1}_{4\times4} + \hat{\gamma}^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \hat{1} & \hat{\sigma}_2 \\ -\hat{\sigma}_2 & \hat{1} \end{bmatrix}, \tag{2.11}$$

aquí $\hat{\gamma}^0$ y $\hat{\gamma}^2$ están en la representación estándar. Compare este último resultado con el obtenido en el problema 5°, parte (a), Tarea 4. (e) La llamada matriz gamma cinco, usualmente se define de la siguiente manera:

$$\hat{\gamma}^5 \equiv i\hat{\gamma}^0\hat{\gamma}^1\hat{\gamma}^2\hat{\gamma}^3. \tag{2.12}$$

Demuestre que en la representación estándar se tiene que

$$\hat{\gamma}^5 = \begin{bmatrix} 0 & \hat{1} \\ \hat{1} & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

Asimismo, en la representación de Weyl se tiene que

$$\hat{\gamma}^5 = \begin{bmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

En la representación supersimétrica se tiene que

$$\hat{\gamma}^5 = \begin{bmatrix} 0 & \hat{1} \\ \hat{1} & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.15}$$

y en la de Majorana se tiene que

$$\hat{\gamma}^5 = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}_2 \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

Nota: a veces se escribe $\hat{\gamma}^5 \equiv i\hat{\gamma}^0\hat{\gamma}^1\hat{\gamma}^2\hat{\gamma}^3 = -i\hat{\gamma}_0\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_2\hat{\gamma}_3 \equiv \hat{\gamma}_5$, sin embargo, en casi todos los libros de mecánica cuántica relativista no se hace distinción explícita entre $\hat{\gamma}^5$ y $\hat{\gamma}_5$ (es decir, si se define $\hat{\gamma}^5$ no se hace mención de $\hat{\gamma}_5$, y viceversa.

3°) La ecuación de Dirac para una partícula estructurada (por ejemplo, el protón o el neutrón) en un campo electromagnético externo muestra un término adicional (llamado término de Pauli) el cual describe la interacción del momento magnético anómalo con este campo:

$$\left[\hat{\gamma}^\mu \left(\hat{p}_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right) \underbrace{-\frac{\hbar\delta}{4mc}\hat{\sigma}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}_{\text{T. de Pauli}} - mc\right]\psi = 0, \tag{3.1}$$

donde

$$\hat{\sigma}^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\,\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu\,]\,, \quad F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{3.2}$$

Demuestre que con este término invariante de Lorentz, el operador de Dirac es hermítico, pero además, la densidad de probabilidad y la densidad de corriente de probabilidad se conservan. Ayuda: los siguientes resultados le serán de utilidad:

$$(\hat{\sigma}^{\mu\nu})^\dagger = \hat{\gamma}^0\hat{\sigma}^{\mu\nu}\hat{\gamma}^0\,, \quad F_{\mu\nu} \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

4°) Encuentre los autovectores y autovalores para una partícula de Dirac en un pozo de potencial unidimensional. Considere las siguientes tres regiones:

$$\text{Región 1}: \quad V = 0\,, \quad x < 0 \tag{4.1}$$

$$\text{Región 2}: \quad V = -V_0\,, \quad 0 < x < L \tag{4.2}$$

$$\text{Región 3}: \quad V = 0\,, \quad x > L \tag{4.3}$$

donde V_0 es un número real positivo. (a) Verifique que las soluciones generales son las siguientes.

(i) En la región 1:

$$\psi_1(x) = A_{\rm I}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{cp_1}{E+mc^2} \end{bmatrix} \exp\left(\frac{ip_1x}{\hbar}\right) + A_{\rm II}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{cp_1}{E+mc^2} \end{bmatrix} \exp\left(-\frac{ip_1x}{\hbar}\right), \tag{4.4}$$

(ii) en la región 2:

$$\psi_2(x) = B_{\rm I}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{cp_2}{E+V_0+mc^2} \end{bmatrix} \exp\left(\frac{ip_2x}{\hbar}\right) + B_{\rm II}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{cp_2}{E+V_0+mc^2} \end{bmatrix} \exp\left(-\frac{ip_2x}{\hbar}\right), \tag{4.5}$$

(iii) en la región 3:

$$\psi_1(x) = C_{\rm I}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{cp_3}{E+mc^2} \end{bmatrix} \exp\left(\frac{ip_3x}{\hbar}\right) + C_{\rm II}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{cp_3}{E+mc^2} \end{bmatrix} \exp\left(-\frac{ip_3x}{\hbar}\right). \tag{4.6}$$

Los correspondientes momenta son dados por:

$$p_1^2c^2 = E^2 - (mc^2)^2 = p_3^2c^2\,, \quad p_2^2c^2 = (E+V_0)^2 - (mc^2)^2 \tag{4.7}$$

¡compruébelo! (b) Como nos interesan unicamente los estados ligados, defina $p_0 \equiv -ip_1$, con p_0 positivo. Demuestre que la ecuación para los autovalores de la energía de la partícula atrapada en el pozo de potencial viene dada por:

$$\frac{1}{cp_2}\tan\left(\frac{p_2L}{\hbar}\right) = -\frac{cp_0}{c^2p_0^2 - EV_0}. \tag{4.8}$$

Esta ecuación podría resolverse graficamente. Si la resuelve, usted podrá verificar que el número de estados que "entran" en el pozo se incrementa a medida que el pozo se hace mas profundo.

5°) (a) ¿Es el operador $\hat\gamma^5 \equiv i\hat\gamma^0\hat\gamma^1\hat\gamma^2\hat\gamma^3$ una constante de movimiento para el operador de Dirac libre? Es decir ¿conmuta $\hat\gamma^5$ con $\hat H_D = \hat\gamma^0\hat{\boldsymbol\gamma}\cdot\hat{\boldsymbol p} + \hat\gamma^0 m$ $(c=1)$? (b) Encuentre los autovalores y proyectores para $\hat\gamma^5$. El operador $\hat\gamma^5$ es también llamado el operador quiralidad. Ayuda: aquí tiene la respuesta a la pregunta (b). Los autovalores y proyectores son ± 1, $\Sigma_\pm = \frac{1}{2}(\hat 1 \pm \hat\gamma^5)$, respectivamente.

6°) (a) Considere un "boost" de Lorentz a lo largo del eje x. Como se demostró en clase, la matriz $\hat S_L$ que transforma el espinor de Dirac en la forma $\psi'(x') = \hat S_L \psi(x)$ viene dada por:

$$\hat S_L = \exp\left(-\frac{1}{2}\hat\alpha_1\epsilon^{01}\right) = \hat S_L^\dagger \neq \hat S_L^{-1}. \tag{6.1}$$

Demuestre que $\hat S_L$ satisface la siguiente propiedad:

$$\hat S_L^{-1} = \hat\gamma^0 \hat S_L^\dagger \hat\gamma^0. \tag{6.2}$$

Ayuda: use la relación $\hat 1 = \hat S_L \hat\gamma^0 \hat S_L^\dagger \hat\gamma^0$ (que se obtiene de (6.2)) y sustituya allí la serie de potencias correspondiente a $\hat{S}_L = \hat{S}_L^\dagger$. (b) Considere una rotación por medio de un ángulo $\varphi = \epsilon^{21}$ alrededor del eje z (o en el plano $x^1 x^2 = xy$). Como se demostró en clase, la matriz $\hat{S}_R$ que transforma el espinor de Dirac en la forma $\psi'(x') = \hat{S}_R \psi(x)$ viene dada por:

$$\hat{S}_R = \exp\left(\frac{i}{2}\hat{\sigma}_{12}\epsilon^{21}\right) \Rightarrow \hat{S}_R^\dagger = \hat{S}_R^{-1}\,(\hat{\sigma}_{12} = \hat{\sigma}^{12} = i\hat{\gamma}^1\hat{\gamma}^2 = i\hat{\beta}\hat{\alpha}_1\hat{\beta}\hat{\alpha}_2 = \hat{\sigma}_{12}^\dagger). \tag{6.3}$$

Demuestre que $\hat{S}_R$ satisface la siguiente propiedad:

$$\hat{S}_R^{-1} = \hat{\gamma}^0 \hat{S}_R^\dagger \hat{\gamma}^0. \tag{6.4}$$

Ayuda: note que en cada una de las tres rotaciones se tiene que $\hat{S}_R = f(\hat{\sigma}^{ij})$ con $i \neq j$. Además, se tiene que $[\,\hat{\gamma}^0, \hat{\sigma}^{ij}\,] = 0$; por lo tanto, $[\,\hat{\gamma}^0, \hat{S}_R\,] = 0$.

7°) Demuestre las siguientes relaciones:

$$\hat{\gamma}^\mu\hat{\gamma}^5 + \hat{\gamma}^5\hat{\gamma}^\mu = 0\,, \quad [\,\hat{\gamma}^5, \hat{\sigma}_{\mu\nu}\,] = 0\,, \quad [\,\hat{S}, \hat{\gamma}^5\,] = 0, \tag{7.1}$$

esta última relación para todas las transformaciones de Lorentz propias. Recuerde que $\hat{\gamma}^5 \equiv i\hat{\gamma}^0\hat{\gamma}^1\hat{\gamma}^2\hat{\gamma}^3$ y $\hat{\sigma}^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\,\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu\,]$.