Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
Postgrado en Física

Introducción a la Mecánica Cuántica Relativista
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/imcr_p.html`

Tarea 9
Preliminares
La ecuación de Dirac
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/imcr_p(t9).pdf`

1°) Considere un electrón de energía positiva de helicidad +1 y momentum $\boldsymbol{p}$ a lo largo de la dirección x positiva ($\boldsymbol{p} = (p_x, 0, 0)$ con $p_x > 0$). Escoja un sistema de referencia primado que viaja con el electrón, es decir, el electrón esta en reposo allí. (a) Demuestre que la función de onda del electrón en el sistema primado puede ser escrita así:

$$\psi'(x') = \frac{1}{\sqrt{V'}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}t'\right). \tag{1.1}$$

(b) ¿Cual es la función de onda para la misma situación física en el sistema no-primado? Ayuda: justamente en el sistema no-primado se observa al electrón moviéndose como se indicó al principio del ejercicio. Otra ayuda: como se discutió en clase, la función de onda del electrón en el sistema no-primado viene dada por:

$$\psi(x) = \hat{S}_L^{-1}\psi'(x'), \tag{1.2}$$

donde $\hat{S}_L^{-1}$ tiene la siguiente forma:

$$\hat{S}_L^{-1} = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{cp_x}{E+mc^2} \\ 0 & 1 & \frac{cp_x}{E+mc^2} & 0 \\ 0 & \frac{cp_x}{E+mc^2} & 1 & 0 \\ \frac{cp_x}{E+mc^2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Nota: usted deberá expresar su resultado en función de cantidades sin primas. Ayuda final: los siguientes resultados, que usted deberá demostrar, le serán de utilidad:

$$ct' = \cosh(\phi)ct - \sinh(\phi)x \Rightarrow t' = \frac{E}{mc^2}t - \frac{p_x}{mc^2}x\,, \quad V = \frac{mc^2}{E}V' \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{V'}} = \sqrt{\frac{mc^2}{E}}\frac{1}{\sqrt{V}}. \tag{1.4}$$

El último resultado en (1.4) proviene de la contracción de Lorentz que sufre el volumen de normalización a lo largo de la dirección del movimiento.

2°) [Problema especial] Considere un cilindro infinito de radio R. En su interior solo existe un campo magnético $\mathbf{B}$. En la región exterior se tiene que $\mathbf{E} = \mathbf{B} = \mathbf{0}$. Escoja el sistema de coordenadas cilíndricas y tome el eje z como el eje del cilindro. En la región $r > R$ el potencial electromagnético

A^μ viene dado por:

$$A_t = V = 0\,, \quad A_r = 0\,, \quad A_\theta = \frac{\Phi}{2\pi r}\,, \quad A_z = 0, \tag{2.1}$$

donde V es el potencial eléctrico y Φ es el flujo de campo magnético a través del cilindro. (a) Compruebe que en la región externa al cilindro todos los campos desaparecen. (b) De la ecuación de Dirac en forma covariante,

$$[\,\hat{\gamma}^\mu\,(i\partial_\mu - eA_\mu) - m\,]\,\Psi = 0 \tag{2.2}$$

(use $\hbar = c = 1$), escriba la ecuación en la forma

$$\hat{H}\Psi = i\frac{\partial \Psi}{\partial t}\,, \quad \hat{H} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}} + m\hat{\beta}, \tag{2.3}$$

donde $\hat{\boldsymbol{\pi}} = \hat{\boldsymbol{p}} - e\boldsymbol{A} = -i\nabla - e\boldsymbol{A}$. (c) Suponga que la función de onda puede escribirse así

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{r}, t) = \psi(\boldsymbol{r})\exp(-iEt). \tag{2.4}$$

Use la representación de Dirac y obtenga el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}\chi + m\phi = E\phi\,, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}\phi - m\chi = E\chi, \tag{2.5}$$

es decir,

$$\phi = \frac{1}{E-m}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}\chi\,, \quad \chi = \frac{1}{E+m}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}\phi \tag{2.6}$$

(ϕ y χ son los respectivos espinores de dos componentes). (d) A partir de (2.6) encuentre la ecuación para el espinor ϕ. Ayuda: aquí tiene la respuesta:

$$\phi = \frac{1}{E^2-m^2}\hat{\boldsymbol{\pi}}^2\phi = \frac{1}{E^2-m^2}\left[-\nabla^2 + 2ie\boldsymbol{A}\cdot\nabla + ie(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + e^2\boldsymbol{A}^2\right]\phi\,. \tag{2.7}$$

Escriba (2.7) en coordenadas cilíndricas (con $\boldsymbol{A}$ dado en (2.1)) y obtenga la ecuación diferencial parcial para $\phi = \phi(\boldsymbol{r}) = \phi(r,\theta,z)$. Ayuda: Aquí la tiene:

$$\phi = \frac{1}{E^2-m^2}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i\nu\right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\phi\,, \tag{2.8}$$

donde $\nu \equiv e\Phi/2\pi$. (e) Compruebe que una solución de esta ecuación viene dada por:

$$\phi = \left[\begin{array}{c} \left[a\,J_{n-\nu}\left(\sqrt{E^2-m^2-k_z^2}\,r\right) + b\,N_{n-\nu}\left(\sqrt{E^2-m^2-k_z^2}\,r\right)\right]\exp\left(ik_z z\right)\exp\left(in\theta\right) \\ 0 \end{array}\right], \tag{2.9}$$

donde n es un número entero, $J_\epsilon(x)$ y $N_\epsilon(x)$ son las funciones de Bessel de primera especie, y a y b (y también k_z) son constantes. (f) Regrese a (2.6) y escriba a χ en términos de ϕ, es decir,

$$\chi = \frac{1}{E+m}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}\phi = \frac{1}{E+m}\left[-i\hat{\sigma}_r\partial_r + \hat{\sigma}_\theta\left(-i\partial_\theta - \frac{\nu}{r}\right) - i\hat{\sigma}_z\partial_z\right]\phi\,, \tag{2.10}$$

donde $\hat{\sigma}_r$ y $\hat{\sigma}_\theta$, consideradas como componentes de $\boldsymbol{\sigma}$ en el sistema de coordenadas cilíndricas, se pueden vincular con sus componentes en el sistema de coordenadas cartesianas por medio de la siguiente relación matricial:

$$\left[\begin{array}{c}\hat{\sigma}_r\\ \hat{\sigma}_\theta\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\hat{\sigma}_x\\ \hat{\sigma}_y\end{array}\right] \tag{2.11}$$

¡Justifique todos estos resultados! (g) Desarrolle la expresión (2.10). Ayuda: aquí tiene el resultado:

$$\chi=\frac{1}{E+m}\left[\begin{array}{cc}-i\frac{\partial}{\partial z} & i\exp(-i\theta)\left[-\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(i\frac{\partial}{\partial\theta}+\nu\right)\right]\\ -i\exp(i\theta)\left[\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(i\frac{\partial}{\partial\theta}+\nu\right)\right] & i\frac{\partial}{\partial z}\end{array}\right]\phi\,. \tag{2.12}$$

(h) Si tiene tiempo, encuentre explícitamente a χ dado el espinor en (2.9). Aquí tiene la respuesta para el caso $k_z=0$ (con esta escogencia las soluciones no dependen de la variable z):

$$\chi=\left[\begin{array}{c}0\\ i\frac{\sqrt{E^2-m^2}}{E+m}\left[a\,J_{n-\nu+1}\left(\sqrt{E^2-m^2}\,r\right)+b\,N_{n-\nu+1}\left(\sqrt{E^2-m^2}\,r\right)\right]\exp\left(i(n+1)\theta\right)\end{array}\right]. \tag{2.13}$$

(i) Si tiene ganas de encontrar algo inesperado le propongo que imponga sobre $\psi(\boldsymbol{r})=\psi(r,\theta)$ ($k_z=0$) la condición de frontera $\psi(r=R,\theta)=0$, por lo tanto, $\phi(r=R,\theta)=0$ y $\chi(r=R,\theta)=0$. Demuestre ahora que la única solución que satisface esta condición de frontera es la solución trivial, es decir, $\psi(\boldsymbol{r})=0$ en la región $r\geq 0$.

3°) [Problema especial] Revisar cada uno de los pasos en el siguiente texto:

Apéndice

La ecuación de Schrödinger para los autovalores con energía negativa $E\equiv-\hbar^2\kappa^2/2m<0$ y autofunciones $\psi(x)$ es: $\psi''(x)-\kappa^2\psi(x)=0$, sobre $\Omega\equiv\mathbb{R}-\{0\}$. La solución de esta última ecuación tiene la forma general

$$\psi(x)=A\exp(+\kappa x)\Theta(-x)+B\exp(-\kappa x)\Theta(x), \tag{35}$$

donde $\kappa=\sqrt{2m(-E)}/\hbar$, y las constantes A y B se relacionan al imponer condiciones de frontera. Consideraremos la siguiente familia general de condiciones de frontera de cuatro parámetros, que fue obtenida a partir de (2) en la Ref. [1]:

$$\left(\begin{array}{c}\psi(0+)\\ \lambda\psi'(0+)\end{array}\right)=\exp(i\varphi)\left(\begin{array}{cc}a & b\\ c & d\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\psi(0-)\\ \lambda\psi'(0-)\end{array}\right), \tag{36}$$

donde

$$a\equiv\frac{m_3+\sin(\phi)}{\sqrt{(m_1)^2+(m_2)^2}}, \tag{37}$$

$$b\equiv\frac{-m_0-\cos(\phi)}{\sqrt{(m_1)^2+(m_2)^2}}, \tag{38}$$

$$c\equiv\frac{-m_0+\cos(\phi)}{\sqrt{(m_1)^2+(m_2)^2}}, \tag{39}$$

$$d\equiv\frac{-m_3+\sin(\phi)}{\sqrt{(m_1)^2+(m_2)^2}}, \tag{40}$$

y

$$\varphi \equiv \tan^{-1}\left(\frac{m_1}{m_2}\right) - \frac{\pi}{2}, \tag{41}$$

con $(m_0)^2 + (m_1)^2 + (m_2)^2 + (m_3)^2 = 1$ (puesto que $ad - bc = 1$). Imponiendo sobre la solución (35) las condiciones de frontera dadas en (36), se obtiene la siguiente ecuación para los autovalores de la energía:

$$b(\lambda\kappa)^2 + (a+d)\lambda\kappa + c = 0, \tag{42}$$

que tiene las siguientes soluciones:

$$\lambda\kappa = -\frac{c}{a+d}\,, \quad (b=0)\,; \quad \lambda\kappa = -\frac{(a+d)}{2b} \pm \frac{\sqrt{(a+d)^2 - 4bc}}{2b}\,, \quad (b \neq 0). \tag{43}$$

Vamos a suponer que cada una de las autofunciones tiene paridad definida, es decir, (i) si ψ es par entonces $\psi(0+) = \psi(0-)$, y por lo tanto $\psi'(0+) = -\psi'(0-)$; (ii) si es impar entonces $\psi(0+) = -\psi(0-)$, y por lo tanto $\psi'(0+) = \psi'(0-)$. Esta condición implica las siguientes dos relaciones:

$$a = d\,, \quad \exp(i\,2\varphi) = 1, \tag{44}$$

lo cual nos permite reescribir los resultados dados en (43) de la siguiente manera:

$$\lambda\kappa = -\frac{c}{2a}\,, \quad (b=0)\,; \quad \lambda\kappa = -\frac{a}{b} \pm \frac{1}{b}\,, \quad (b \neq 0) \tag{45}$$

(en la última expresión usamos además el hecho que $bc = ad - 1$).

4°) Como ya usted sabe, el Hamiltoniano de Dirac libre tiene la siguiente forma:

$$\hat{H} = c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} + mc^2\hat{\beta}. \tag{4.1}$$

(a) Demuestre que el operador

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \\ 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} \tag{4.2}$$

conmuta con $\hat{H}$. (b) También demuestre que $[\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}] = 0$. Estos dos últimos resultados implican que $\hat{H}$, $\hat{\boldsymbol{p}}$ y $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}$ pueden diagonalizarse simultaneamente. (c) El operador helicidad se define usualmente como

$$\hat{\Lambda} \equiv \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \frac{\hat{\boldsymbol{p}}}{|\hat{\boldsymbol{p}}|} = \frac{1}{|\hat{\boldsymbol{p}}|}\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{|\hat{\boldsymbol{p}}|}\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \\ 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\hat{\boldsymbol{p}}|}\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} & 0 \\ 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Compruebe que este operador también conmuta con $\hat{H}$ y con $\hat{\boldsymbol{p}}$. (d) Para un electrón libre que se propaga en la dirección del eje z, escriba las autofunciones y los autovalores de $\hat{H}$, $\hat{\boldsymbol{p}}$ y $\hat{\Lambda}$. Ayuda: use las soluciones para $A^\mu = (A^0, \boldsymbol{A}) = (0, \boldsymbol{0})$ que se obtuvieron en clase.

5°) En las aplicaciones de la teoría de Dirac usualmente aparecen otras matrices que se obtienen a partir de las $\hat{\gamma}^\mu$. Estas pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\hat{\Gamma}^{\rm S} = \hat{1}\,, \quad \hat{\Gamma}^{\rm V}_\mu = \hat{\gamma}_\mu\,, \quad \hat{\Gamma}^{\rm T}_{\mu\nu} = \hat{\sigma}_{\mu\nu}\,, \quad \hat{\Gamma}^{\rm P} = i\hat{\gamma}^0\hat{\gamma}^1\hat{\gamma}^2\hat{\gamma}^3 \equiv \hat{\gamma}^5\,, \quad \hat{\Gamma}^{\rm A}_\mu = \hat{\gamma}^5\hat{\gamma}_\mu. \tag{5.1}$$

Demuestre (o compruebe) a partir de la relación fundamental de Clifford, $\hat{\gamma}^\mu\hat{\gamma}^\nu + \hat{\gamma}^\nu\hat{\gamma}^\mu = 2g^{\mu\nu}$, que estas dieciseis (16) matrices satisfacen las siguientes propiedades: (a) $(\hat{\Gamma}^n)^2 = \pm\hat{1}$ $(n = 1, 2, \ldots, 16)$.

(b) Para cada $\hat{\Gamma}^n$, excepto $\hat{\Gamma}^{\mathrm{S}}$, existe una $\hat{\Gamma}^m$ tal que $\hat{\Gamma}^n\hat{\Gamma}^m = -\hat{\Gamma}^m\hat{\Gamma}^n$(de aquí demuestre que la traza de $\hat{\Gamma}^n$ se anula). (c) Dada $\hat{\Gamma}^a$ y $\hat{\Gamma}^b$ ($a \neq b$) existe una $\hat{\Gamma}^n \neq \hat{\Gamma}^{\mathrm{S}}$ tal que $\hat{\Gamma}^a\hat{\Gamma}^b = \hat{\Gamma}^n$. (d) Suponga que existen números a_n tales que $\sum_n a_n\hat{\Gamma}^n = 0$. Demuestre que $a_n = 0$, es decir, que las matrices $\hat{\Gamma}^n$ son linealmente independientes. (e) En consecuencia, cualquier matriz 4×4 puede escribirse como una combinación lineal única de la dieciseis $\hat{\Gamma}^n$. Encuentre los coeficientes a_n en la siguiente expansión de la matriz arbitraria $\hat{\Lambda}$:

$$\hat{\Lambda} = \sum_n a_n\hat{\Gamma}^n. \tag{5.2}$$