Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

MECÁNICA CUÁNTICA (2431)

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicacuantica.html

Examen 1

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mc_e1.pdf

1°) Un cuerpo rígido con momento de inercia I_z rota libremente en el plano $x-y$. Sea φ el ángulo azimutal entre el eje x y el eje del rotor (no el eje de rotación). El Hamiltoniano $\hat{H}$ para este sistema viene dado por

$$\hat{H} = \frac{1}{2I_z}\hat{L}_z^2, \tag{1.1}$$

donde $\hat{L}_z = -\mathrm{i}\hbar\,\mathrm{d}/\mathrm{d}\varphi$.
(a) Justifique el resultado (1.1).
(b) Encuentre los autovalores y las correspondientes autofunciones $\psi(\varphi)$ de $\hat{H}$. Por supuesto, ya que la función de onda debe ser monovaluada ["single-valued"], se debe cumplir la condición $\psi(\varphi) = \psi(\varphi+2\pi)$.
(c) ¿Podría escribir una base de autovectores comunes para $\hat{L}_z$ y $\hat{H}$? ¿Forman $\hat{L}_z$ y $\hat{H}$ un C.S.C.O?
[1+4+2 = 7 ptos.]

2°) Como se demostró en clase, para una función $\psi(x)$ que se puede expandir en una serie de Taylor, se tiene que

$$\psi(x+x_0) = \exp\left(\mathrm{i}\,x_0\,\frac{\hat{p}}{\hbar}\right)\psi(x), \tag{2.1}$$

donde x_0 es cualquier distancia constante y $\hat{p} = -\mathrm{i}\hbar\,\mathrm{d}/\mathrm{d}x$. Debido a (2.1), $\hat{p}/\hbar$ se llama el generador de las translaciones en el espacio. De la misma forma, para una función de onda $\Psi(x,t)$ que se puede expandir en una serie de Taylor en la variable tiempo, se tiene que

$$\Psi(x,t+t_0) = \exp\left(-\mathrm{i}\,t_0\,\frac{\hat{H}}{\hbar}\right)\Psi(x,t), \tag{2.2}$$

donde t_0 es cualquier tiempo constante y $\hat{H} = +\mathrm{i}\hbar\,\partial/\partial t$. Debido a (2.2), $-\hat{H}/\hbar$ es llamado el generador de las translaciones en el tiempo.
(a) Para una función $\psi(\varphi)$ (φ es el ángulo azimutal) que se puede expandir en una serie de Taylor, demuestre que

$$\psi(\varphi+\varphi_0) = \exp\left(\mathrm{i}\,\varphi_0\,\frac{\hat{L}_z}{\hbar}\right)\psi(\varphi) \tag{2.3}$$

donde φ_0 es cualquier ángulo azimutal constante y $\hat{L}_z = -\mathrm{i}\hbar\,\mathrm{d}/\mathrm{d}\varphi$. Debido a (2.3), $\hat{L}_z/\hbar$ es llamado el generador de las rotaciones alrededor del eje z. Nota: en general, $\hat{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{n}/\hbar$ es el generador de las

rotaciones alrededor de la dirección $\mathbf{n}$, en el sentido que $\exp(\mathrm{i}\,\varphi_0\,\hat{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{n}\,/\hbar)$ efectúa una rotación a través del ángulo φ_0 alrededor del eje $\mathbf{n}$ (en el sentido derecho).
(b) En el caso del espín, el generador de las rotaciones es $\hat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{n}\,/\hbar$. En particular, para espín $1/2$ se tiene que

$$\underbrace{|\psi\rangle'} = \exp\left(\mathrm{i}\,\varphi_0\,\frac{\hat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{n}}{\hbar}\right)|\psi\rangle = \underbrace{\exp\left(\mathrm{i}\,\varphi_0\,\frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}{2}\cdot\mathbf{n}\right)|\psi\rangle}\,, \tag{2.4}$$

lo que nos dice como se transforman los espinores -de dos componentes- bajo rotaciones (como es usual, las matrices $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ son las matrices de Pauli). Por ejemplo, la matriz 2×2 que representa una rotación de $360°$ alrededor del eje z (es decir, una rotación de $360°$ que se produce en el plano $x-y$) viene dada por

$$\exp\left(\mathrm{i}\,\varphi_0\,\frac{\hat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{n}}{\hbar}\right) = \exp\left(\mathrm{i}\,2\pi\,\frac{\hat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{z}}{\hbar}\right) = \exp\left(\mathrm{i}\,2\pi\,\frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}{2}\cdot\mathbf{z}\right) = \exp\left(\mathrm{i}\,\pi\,\hat{\sigma}_z\right). \tag{2.5}$$

Calcule explícitamente a esta matriz. Recuerde que

$$\hat{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

(c) Aplique el operador (2.5) sobre el autoestado correspondiente al autovalor $+\hbar/2$ del operador

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

¿Qué resultado obtuvo? ¿Lo esperaba?
(d) ¿Cual sería el resultado de la pregunta (c) si la rotación es de $360° + 360° = 720°$? Ayuda: haga $\varphi_0 = 4\pi$ en la fórmula (2.5).
[2+2+3+1 = 8 ptos.]

3°) Considere un sistema físico cuyo espacio de estados tridimensional es extendido ["spanned"] por la base ortonormal formada por los tres kets $|u_1\rangle$, $|u_2\rangle$ y $|u_3\rangle$. Defina dos operadores, $\hat{L}_z$ y $\hat{S}$, de la siguiente manera

$$\hat{L}_z\,|u_1\rangle = |u_1\rangle\,, \quad \hat{L}_z\,|u_2\rangle = 0, \quad \hat{L}_z\,|u_3\rangle = -\,|u_3\rangle\,, \tag{3.1}$$

$$\hat{S}\,|u_1\rangle = |u_3\rangle\,, \quad \hat{S}\,|u_2\rangle = |u_2\rangle\,, \quad \hat{S}\,|u_3\rangle = |u_1\rangle\,. \tag{3.2}$$

(a) Escriba las matrices que representan a los operadores $\hat{L}_z$, $\hat{S}$, $\hat{L}_z^2$ y $\hat{S}^2$, en la base $|u_k\rangle$ $(k = 1, 2, 3)$ ¿Son estos operadores observables?
(b) ¿Forman L_z^2 y $\hat{S}$ un C.S.C.O? Si es así, obtenga una base de autovectores comunes.
[3+4 = 7 ptos.]