Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

MECÁNICA CUÁNTICA (2431)

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicacuantica.html

Examen 1 (Recuperación)

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mc_e1_r.pdf

1°) Un cuerpo rígido con momento de inercia I_z rota libremente en el plano $x-y$. Sea φ el ángulo azimutal entre el eje x y el eje del rotor (no el eje de rotación). El Hamiltoniano $\hat{H}$ para este sistema viene dado por

$$\hat{H} = \frac{1}{2I_z}\hat{L}_z^2, \tag{1.1}$$

donde $\hat{L}_z = -\mathrm{i}\hbar\,\mathrm{d}/\mathrm{d}\varphi$.
(a) Justifique el resultado (1.1).
(b) Encuentre los autovalores y las correspondientes autofunciones $\psi(\varphi)$ de $\hat{H}$. Por supuesto, ya que la función de onda debe ser monovaluada ["single-valued"], se debe cumplir la condición $\psi(\varphi) = \psi(\varphi+2\pi)$.
(c) ¿Podría escribir una base de autovectores comunes para $\hat{L}_z$ y $\hat{H}$? ¿Forman $\hat{L}_z$ y $\hat{H}$ un C.S.C.O?
[1+4+2 = 7 ptos.]

2°) Para una función $\psi(\varphi)$ (φ es el ángulo azimutal) que se puede expandir en una serie de Taylor.
(a) Demuestre que

$$\psi(\varphi+\varphi_0) = \exp\left(\mathrm{i}\,\varphi_0\,\frac{\hat{L}_z}{\hbar}\right)\psi(\varphi) \tag{2.1}$$

donde φ_0 es cualquier ángulo azimutal constante y $\hat{L}_z = -\mathrm{i}\hbar\,\mathrm{d}/\mathrm{d}\varphi$. Debido a (2.1), $\hat{L}_z/\hbar$ es llamado el generador de las rotaciones alrededor del eje z. Nota: en general, $\hat{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{n}/\hbar$ es el generador de las rotaciones alrededor de la dirección $\mathbf{n}$, en el sentido que $\exp(\mathrm{i}\,\varphi_0\,\hat{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{n}/\hbar)$ efectúa una rotación a través del ángulo φ_0 alrededor del eje $\mathbf{n}$ (en el sentido derecho).
(b) En el caso del espín, el generador de las rotaciones es $\hat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{n}/\hbar$. En particular, para espín $1/2$ se tiene que

$$\underbrace{|\psi\rangle'} = \exp\left(\mathrm{i}\,\varphi_0\,\frac{\hat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{n}}{\hbar}\right)|\psi\rangle = \underbrace{\exp\left(\mathrm{i}\,\varphi_0\,\frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}{2}\cdot\mathbf{n}\right)|\psi\rangle}\,, \tag{2.2}$$

lo que nos dice como se transforman los espinores -de dos componentes- bajo rotaciones (como es usual, las matrices $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ son las matrices de Pauli). Por ejemplo, la matriz 2×2 que representa una rotación de $360°$ alrededor del eje z (es decir, una rotación de $360°$ que se produce en el plano $x-y$) viene dada por

$$\exp\left(\mathrm{i}\,\varphi_0\,\frac{\hat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{n}}{\hbar}\right) = \exp\left(\mathrm{i}\,2\pi\,\frac{\hat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{z}}{\hbar}\right) = \exp\left(\mathrm{i}\,2\pi\,\frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}{2}\cdot\mathbf{z}\right) = \exp\left(\mathrm{i}\,\pi\,\hat{\sigma}_z\right). \tag{2.3}$$

Calcule explícitamente a esta matriz. Recuerde que

$$\hat{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

(c) Aplique el operador (2.3) sobre el autoestado correspondiente al autovalor $-\hbar/2$ del operador

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

¿Qué resultado obtuvo? ¿Lo esperaba?
(d) ¿Cual sería el resultado de la pregunta (c) si la rotación es de $360° + 360° = 720°$? Ayuda: haga $\varphi_0 = 4\pi$ en la fórmula (2.3).
[2+2+3+1 = 8 ptos.]

3°) Suponga conocidas las soluciones $w_\alpha(x)$ de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$-\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}w_\alpha(x) + V(x)w_\alpha(x) = E_\alpha w_\alpha(x), \tag{3.1}$$

las cuales satisfacen una relación de ortonormalidad "a la Dirac" $\langle w_\alpha, w_{\alpha'}\rangle = \delta(\alpha - \alpha')$. Por otro lado, necesitamos resolver la siguiente ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) + \lambda\delta(x)\psi(x) = E\psi(x), \tag{3.2}$$

donde λ es un parámetro real (el "strength de la delta"). Pues bien, la solución $\psi(x)$ de (3.2) se puede escribir en términos de las soluciones de (3.1) así:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\alpha\; c(\alpha)\, w_\alpha(x). \tag{3.3}$$

(a) Sustituya (3.3) en los dos primeros términos a la izquierda en (3.2). Ahora use la ecuación (3.1) para eliminar el término que tiene la derivada segunda así como el que tiene el potencial $V(x)$. Finalmente, multiplique escalarmente a la ecuación que obtuvo por $w_{\alpha'}(x)$ y despeje $c(\alpha')$. Nota: Si lo ha hecho bien, usted habrá encontrado la siguiente expresión para las soluciones de (3.2)

$$\psi(x) = \lambda\psi(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\alpha\; \frac{\bar{w}_\alpha(0)\, w_\alpha(x)}{E - E_\alpha}, \tag{3.4}$$

donde la barra corresponde a la conjugación compleja. La cantidad $\psi(0)$ se puede determinar de la condición de normalización para $\psi(x)$.
(b) Suponga que $V(x) = 0$ y $\lambda \equiv -g < 0$ ¿cuales son las soluciones $w_\alpha(x)$ de (3.1) en este caso?
(c) Encuentre $\psi(x)$. Si le interesó el problema, le recomiendo consultar la referencia: D. A. Atkinson y H. W. Crater, "An exact treatment of the Dirac delta function potential in the Schrödinger equation," *Am. J. Phys.* **43**, 301 (1975).
[3+1+1 = 5 ptos.]