Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

MECÁNICA CUÁNTICA (2431)

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicacuantica.html

Examen 2

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mc_e2.pdf

1°) Una partícula de masa m se mueve no-relativisticamente en una dimensión en un potencial dado por $V(x) = -a\delta(x)$ $(a > 0)$, donde $\delta(x)$ es la delta de Dirac. La partícula esta ligada a este potencial.
(a) Como se demostró en clase, cualquier solución de la ecuación de Schrödinger para este problema,

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\psi''(x) - a\delta(x)\psi(x) = E\psi(x), \tag{1.1}$$

debe satisfacer las condiciones de frontera

$$\psi(0+) = \psi(0-) \equiv \psi(0), \quad \psi'(0+) - \psi'(0-) = -\frac{2\mathrm{m}a}{\hbar^2}\psi(0). \tag{1.2}$$

Demuestre que $\hat{H}$ posee un solo estado ligado (normalizado) con energía $E < 0$ que tiene la forma

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{\mathrm{m}a}{\hbar^2}}\,\exp\left(-\frac{\mathrm{m}a}{\hbar^2}\,|\,x\,|\right), \quad \left[E = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{m}a^2}{\hbar^2}\right]. \tag{1.3}$$

(b) Ahora verifique que $\psi(x)$ en (1.3), con E dado en (1.3), satisface la ecuación en (1.1).
(c) Encuentre el valor de x_0 para que la probabilidad de encontrar a la partícula en la región $|\,x\,| < x_0$ sea exactamente igual a $1/2$.
[2+2+3 = 7 ptos.]

2°) Considere una partícula de masa m en el interior del intervalo (o caja) $x \in [0, L]$. Los $|\psi_n\rangle$ son los autoestados del Hamiltoniano del sistema

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}, \tag{2.1}$$

y sus autovalores son

$$E = \frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \tag{2.2}$$

con $n = 1, 2, \ldots$. Supongamos que el estado de la partícula en el instante $t = 0$ viene dado por

$$|\psi(0)\rangle = a_1\,|\psi_1\rangle + a_2\,|\psi_2\rangle + a_3\,|\psi_3\rangle + a_4\,|\psi_4\rangle\,. \tag{2.3}$$

(a) ¿Cuando se mide la energía de la partícula en el estado $|\psi(0)\rangle$ ¿cual es la probabilidad de encontrar el valor

$$\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 ?$$

¿Y el valor

$$4\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 ?$$

¿Y el valor

$$9\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 ?$$

¿Y un valor más pequeño que

$$6\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 ?$$

(b) Calcule el vector de estado $|\psi(t)\rangle$ en el instante t.
(c) Los resultados encontrados en **(a)** ¿permanecen válidos en un tiempo arbitrario t?
(d) Suponga que cuando se mide la energía, se encuentra el resultado

$$16\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 .$$

Después de la medida ¿cual es el estado del sistema? ¿Cual sería este último resultado si la energía se mide de nuevo?
Nota: ¡usted ya conoce los autoestados para este problema! ¿o no?
[2+2+1+2 = 7 ptos.]

3°) Suponga que una partícula de espín $1/2$ se encuentra en el estado (normalizado)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

(a) Si se mide $\hat{S}_z$ ¿cuál es la probabilidad de obtener el valor $+\hbar/2$? ¿y $-\hbar/2$?
(b) Si usted mide $\hat{S}_x$, encuentre la probabilidad de obtener los valores $+\hbar/2$ y $-\hbar/2$.
[2+4 = 6 ptos.]