Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

MECÁNICA CUÁNTICA (2431)

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicacuantica.html

Examen 3

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mc_e3.pdf

1°) Como usted sabe, si un operador $\hat{A}$ no depende explícitamente del tiempo, se tiene que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{A}\rangle = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{A}]\rangle. \tag{1.1}$$

(a) Demuestre este resultado.
(b) Use la fórmula (1.1) para demostrar el siguiente resultado:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{X}\hat{P}\rangle = 2\langle\hat{T}\rangle - \left\langle \hat{X}\,\frac{\mathrm{d}\hat{V}}{\mathrm{d}x}\right\rangle, \tag{1.2}$$

donde $\hat{T} = \hat{P}^2/2m$ es el operador energía cinética ($\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$). Nota: las siguientes relaciones le serán de utilidad:

$$[\hat{A},\hat{B}\hat{C}] = [\hat{A},\hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A},\hat{C}], \quad [\hat{A}, f(\hat{B})] = [\hat{A},\hat{B}]f'(\hat{B}), \tag{1.3}$$

donde en la última fórmula se tiene que $[\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]] = 0$.
(c) En un estado estacionario el lado izquierdo en (1.2) es nulo ¿por qué? De esta forma se obtiene la relación

$$2\langle\hat{T}\rangle = \left\langle \hat{X}\,\frac{\mathrm{d}\hat{V}}{\mathrm{d}x}\right\rangle. \tag{1.4}$$

Este es el llamado Teorema Virial. Nota: no olvide que los valores medios en (1.4) se calculan en un estado estacionario de $\hat{H}$.
(d) Demuestre que $\langle\hat{T}\rangle = \langle\hat{V}\rangle$ para los estados estacionarios del oscilador armónico.
[1+3+1+1 = 6 ptos.]

2°) Como se demostró en clase, las matrices de Pauli satisfacen la siguiente relación:

$$\hat{\sigma}_l\,\hat{\sigma}_m = \delta_{lm}\hat{1} + \mathrm{i}\sum_l \epsilon_{lmp}\,\hat{\sigma}_p, \tag{2.1}$$

donde ϵ_{lmp} es el símbolo de Levi-Civita, el cual tiene los valores: $+1$ si $lmp = 123,\ 231$ o 312; -1 si $lmp = 213,\ 321$ o 132; y 0 en cualquier otro caso.
(a) ¿Cuanto vale el producto $\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{\sigma}$? Ayuda: calcule la componente k-ésima ($(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{\sigma})_k$). La siguiente identidad le será de utilidad:

$$\epsilon_{klm}\,\epsilon_{pqm} = \delta_{kp}\,\delta_{lq} - \delta_{kq}\,\delta_{lp}. \tag{2.2}$$

Aunque será más útil usar la identidad correspondiente a $q = l$.
(b) A partir del resultado obtenido en **(a)**, demuestre que $\hat{\sigma}_x\,\hat{\sigma}_y\,\hat{\sigma}_z = \mathrm{i}\hat{1}$ (y sus permutaciones cíclicas).
(c) Demuestre que las matrices de Pauli también verifican la siguiente relación: $\mathrm{Tr}(\hat{\sigma}_l\,\hat{\sigma}_m) = 2\delta_{lm}$, donde $l,\ m = 1, 2, 3$ (o bien $l,\ m = x, y, z$). Si vemos la matriz identidad $\hat{1}$ como la matriz "cero" de Pauli ($\hat{1} \equiv \hat{\sigma}_0$), también podemos escribir la siguiente relación: $\mathrm{Tr}(\hat{\sigma}_\alpha\,\hat{\sigma}_\beta) = 2\delta_{\alpha\beta}$, donde $\alpha,\ \beta = 0, 1, 2, 3$. Demuestre también esta última relación.
(d) Ya que cualquier matriz $\hat{M}$, 2×2, tiene solo cuatro grados de libertad independientes (complejos), esta podría ser escrita así:

$$\hat{M} = \sum_{\alpha=0}^{3} m_\alpha \hat{\sigma}_\alpha. \tag{2.3}$$

Para encontrar a los cuatro coeficientes (complejos) m_β, multiplique la expresión (2.3) por $\hat{\sigma}_\beta$ (por la derecha) y tome la traza ¿Que encontró? Ayuda: aquí tiene la respuesta, pero usted lo debe demostrar

$$m_\alpha = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\hat{M}\hat{\sigma}_\alpha). \tag{2.4}$$

(e) Exprese la siguiente matriz $\hat{M}$ en términos de la matrices de Pauli

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Ayuda: use la fórmula (2.4) para encontrar los coeficientes m_α que están en la expresión (2.3). Nota: recuerde que $\alpha = 0, 1, 2, 3$.

[2+1+2+1+2 = 8 ptos.]

3°) Como usted sabe, la solución más general de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo en la recta real con $V(x) = \mathrm{m}\omega^2 x^2/2$, se puede escribir en términos de los autoestados para el oscilador armónico unidimensional $\psi_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) de la siguiente manera:

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,\psi_n(x)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n t}{\hbar}\right), \tag{3.1}$$

donde $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$. Use esta solución para demostrar que el valor medio del operador $\hat{x}$ tiene la forma

$$\langle\hat{x}\rangle = \langle\hat{x}\rangle(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \tag{3.2}$$

donde A y B son constantes. Ayuda: como se demostró en clase,

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{\mathrm{m}\omega}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right), \tag{3.3}$$

donde

$$\hat{a}^\dagger\psi_n(x) = \sqrt{n+1}\,\psi_{n+1}(x), \quad \hat{a}\,\psi_n(x) = \sqrt{n}\,\psi_{n-1}(x). \tag{3.4}$$

[6 ptos.]