Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

MECÁNICA CUÁNTICA (2431)

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicacuantica.html

Examen de Reparación

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mc_er.pdf

1°) Un cuerpo rígido con momento de inercia I_z rota libremente en el plano $x-y$. Sea φ el ángulo azimutal entre el eje x y el eje del rotor (no el eje de rotación).
(a) Encuentre el Hamiltoniano $\hat{H}$ para este sistema. Ayuda: aquí tiene la respuesta

$$\hat{H} = \frac{1}{2I_z}\hat{L}_z^2 \tag{1.1}$$

¡Justifique este resultado! Nota: recuerde que $\hat{L}_z = -\mathrm{i}\hbar\,\mathrm{d}/\mathrm{d}\varphi$.
(b) Encuentre los autovalores y las correspondientes autofunciones $\psi(\varphi)$ de $\hat{H}$. Por supuesto, ya que la función de onda debe ser monovaluada ["single-valued"], se debe cumplir la condición $\psi(\varphi) = \psi(\varphi+2\pi)$.
(c) En el tiempo $t=0$ el rotor es descrito por el paquete de ondas

$$\Psi(\varphi, t=0) = \frac{1}{2}A - \frac{1}{4}A\,[\,\exp(\mathrm{i}2\varphi) + \exp(-\mathrm{i}2\varphi)\,]\,, \tag{1.2}$$

donde A es una constante arbitraria. Encuentre $\Psi(\varphi, t)$ para $t > 0$.
[1+3+3=7 ptos.]

2°) Como se demostró en clase, para una función $\psi(x)$ que se puede expandir en una serie de Taylor, se tiene que

$$\psi(x+x_0) = \exp\left(\mathrm{i}\,x_0\,\frac{\hat{p}}{\hbar}\right)\psi(x), \tag{2.1}$$

donde x_0 es cualquier distancia constante y $\hat{p} = -\mathrm{i}\hbar\,\mathrm{d}/\mathrm{d}x$. Debido a (2.1), $\hat{p}/\hbar$ se llama el generador de las translaciones en el espacio. De la misma forma, para una función de onda $\Psi(x,t)$ que se puede expandir en una serie de Taylor en la variable tiempo, se tiene que

$$\Psi(x, t+t_0) = \exp\left(-\mathrm{i}\,t_0\,\frac{\hat{H}}{\hbar}\right)\Psi(x,t), \tag{2.2}$$

donde t_0 es cualquier tiempo constante y $\hat{H} = +\mathrm{i}\hbar\,\partial/\partial t$. Debido a (2.2), $-\hat{H}/\hbar$ es llamado el generador de las translaciones en el tiempo.
(a) Para una función $\psi(\varphi)$ (φ es el ángulo azimutal) que se puede expandir en una serie de Taylor, demuestre que

$$\psi(\varphi+\varphi_0) = \exp\left(\mathrm{i}\,\varphi_0\,\frac{\hat{L}_z}{\hbar}\right)\psi(\varphi) \tag{2.3}$$

donde φ_0 es cualquier ángulo azimutal constante y $\hat{L}_z = -\mathrm{i}\hbar\,\mathrm{d}/\mathrm{d}\varphi$. Debido a (2.3), $\hat{L}_z/\hbar$ es llamado el generador de las rotaciones alrededor del eje z. Nota: en general, $\hat{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{n}/\hbar$ es el generador de las rotaciones alrededor de la dirección $\mathbf{n}$, en el sentido que $\exp(\mathrm{i}\,\varphi_0\,\hat{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{n}/\hbar)$ efectúa una rotación a través del ángulo φ_0 alrededor del eje $\mathbf{n}$ (en el sentido derecho).
(b) En el caso del espín, el generador de las rotaciones es $\hat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{n}/\hbar$. En particular, para espín $1/2$ se tiene que

$$\underbrace{|\psi\rangle'} = \exp\left(\mathrm{i}\,\varphi_0\,\frac{\hat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{n}}{\hbar}\right)|\psi\rangle = \underbrace{\exp\left(\mathrm{i}\,\varphi_0\,\frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}{2}\cdot\mathbf{n}\right)|\psi\rangle}\,, \tag{2.4}$$

lo que nos dice como se transforman los espinores -de dos componentes- bajo rotaciones (como es usual, las matrices $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ son las matrices de Pauli). Por ejemplo, la matriz 2×2 que representa una rotación de $360°$ alrededor del eje z (es decir, una rotación de $360°$ que se produce en el plano $x-y$) viene dada por

$$\exp\left(\mathrm{i}\,\varphi_0\,\frac{\hat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{n}}{\hbar}\right) = \exp\left(\mathrm{i}\,2\pi\,\frac{\hat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{z}}{\hbar}\right) = \exp\left(\mathrm{i}\,2\pi\,\frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}{2}\cdot\mathbf{z}\right) = \exp\left(\mathrm{i}\,\pi\,\hat{\sigma}_z\right). \tag{2.5}$$

Calcule explícitamente a esta matriz. Recuerde que

$$\hat{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

(c) Aplique el operador (2.5) sobre el autoestado correspondiente al autovalor $-\hbar/2$ del operador

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

¿Qué resultado obtuvo? ¿Lo esperaba?
(d) ¿Cual sería el resultado de la pregunta (c) si la rotación es de $360° + 360° = 720°$? Ayuda: haga $\varphi_0 = 4\pi$ en la fórmula (2.5).
[2+2+3+1 = 8 ptos.]

3°) Considere la siguiente ecuación de Schrödinger en un sistema de unidades naturales -digamos-:

$$-\frac{1}{2\mathrm{m}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi} - \mathrm{i}\epsilon\right)^2\psi(\phi) = E\psi(\phi), \tag{3.1}$$

donde ϵ es una cantidad constante.
(a) Demuestre que esta última ecuación la resuelve la función

$$\psi = \psi(\phi) = \mathrm{const}\cdot\exp\left[\,\mathrm{i}(\mu+\epsilon)\phi\,\right], \tag{3.2}$$

con autovalores

$$E = \frac{\mu^2}{2\mathrm{m}}. \tag{3.3}$$

(b) Aplique sobre la solución (3.2) la condición de frontera periódica $\psi(0) = \psi(2\pi)$ y encuentre las autofunciones y los autovalores para este problema ¿Está degenerado el espectro?
[4+1 = 5 ptos.]