Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

MECÁNICA CUÁNTICA (2431)
http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicacuantica.html

Tarea 2
Preliminares
http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mc_t2.pdf

1°) (a) Como se demostró en clase, la transformada de Fourier de la función de Heaviside $\Theta(x)$ viene dada por

$$\phi(k) \equiv \mathcal{TF}[\,\psi(x) = \Theta(x)\,] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \Theta(x) \exp(-\mathrm{i}kx) = \frac{(-\mathrm{i})}{\sqrt{2\pi}} \left[\mathrm{P.V.} \left(\frac{1}{k} \right) + \mathrm{i}\pi\delta(k) \right]. \tag{1.1}$$

Encuentre la transformada de Fourier inversa de $\phi(k)$,

$$(\mathcal{TF})^{-1}[\,\phi(k)\,] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k\, \phi(k) \exp(+\mathrm{i}kx) \tag{1.2}$$

¿Encontró lo que esperaba? (b) Halle la transformada de Fourier de la distribución "valor principal de una integral", es decir, calcule la siguiente cantidad:

$$\phi(k) \equiv \mathcal{TF} \left[\mathrm{P.V.} \left(\frac{1}{x} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \frac{\exp(-\mathrm{i}kx)}{x}. \tag{1.3}$$

La siguiente integral le será de utilidad:

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \frac{\sin(kx)}{x} = \pi\, \mathrm{sgn}(k). \tag{1.4}$$

2°) Puede demostrarse que el Hamiltoniano de Schrödinger con el potencial delta de Dirac $\hat{V}(x) = g_1\delta(x)$ ($g_1 < 0$) posee un solo estado ligado con energía $E < 0$ que tiene la forma

$$\psi(x) = \sqrt{-\frac{1}{2}\alpha g_1}\, \exp\left(\frac{1}{2}\alpha g_1\, |\, x\, | \right), \quad \left[E = -\frac{1}{4}\alpha (g_1)^2 \right]. \tag{2.1}$$

(a) Esta autofunción satisface la condición de frontera

$$\psi(0+) = \psi(0-) \equiv \psi(0), \quad \psi'(0+) - \psi'(0-) = \alpha g_1 \psi(0) \tag{2.2}$$

¡Demuéstrelo! (b) Tome el límite $g_1 \to -\infty$ en las expresiones dadas en la Ec. (2.1). Demuestre que

$$|\, \psi(x)\, |^2 = \delta(x), \quad E = -\infty. \tag{2.3}$$

Para obtener este resultado, use la siguiente representación de la delta de Dirac:

$$\delta(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2} \exp(-N\,|\,x\,|). \tag{2.4}$$

(c) El resultado (2.3) nos dice que, en este caso, $\psi(x)$ es un estado altamente localizado con energía infinita, de hecho, es esencialmente la raiz cuadrada de la delta de Dirac. A pesar de estos resultados, es fácil mostrar que el producto escalar de $\psi(x)$ con una función de cuadrado integrable, $f \in \mathcal{H} \equiv \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, se anula. Este último resultado implica que la distribución (o funcional lineal) asociado a $\psi(x)$,

$$\psi[f] = \langle \psi, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \psi(x) f(x) = \lim_{g_1\to-\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \psi(g_1, x) f(x), \tag{2.5}$$

es justamente nulo ¡Demuéstrelo! Nota: si lo ha demostrado, podrá concluir que la autofunción en cuestión es realmente trivial, es decir, $\psi(x) = 0$ en todas partes de $\mathbb{R}$.

3°) Como usted sabe, $\psi(x)$ y su transformada de Fourier $\phi(p)$,

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}p\, \phi(p) \exp\left(\mathrm{i}\frac{p}{\hbar}x\right), \quad \phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \psi(x) \exp\left(-\mathrm{i}\frac{p}{\hbar}x\right), \tag{3.1}$$

nos llevan a la siguiente representación integral de la delta de Dirac:

$$\delta(x - \underline{x}) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}p\, \exp\left[\mathrm{i}\frac{p}{\hbar}(x - \underline{x})\right]. \tag{3.2}$$

Por cierto, en la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo surge precisamente esta última fórmula, aunque allí es escrita con otras cantidades,

$$\delta(E - \underline{E}) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t\, \exp\left[\mathrm{i}\frac{t}{\hbar}(E - \underline{E})\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-T/2}^{+T/2} \mathrm{d}t\, \exp\left[\mathrm{i}\frac{t}{\hbar}(E - \underline{E})\right]. \tag{3.3}$$

De hecho, en esta relación, E (y $\underline{E}$) tiene unidades de energía y t (y T) unidades de tiempo. Pues bien, demuestre la siguiente relación formal:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\left[2\pi\hbar\, \delta(E - \underline{E})\right]^2}{T} = 2\pi\hbar\, \delta(E - \underline{E}). \tag{3.4}$$

La siguiente representación de la delta de Dirac le será de utilidad:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\sin^2(T\alpha)}{\pi T \alpha^2} = \delta(\alpha). \tag{3.5}$$

4°) Encuentre, en términos de distribuciones, la siguiente derivada con respecto a la variable y del límite $\lim\limits_{x\to 0} x + \mathrm{i}y$, es decir:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\lim_{x\to 0} x + \mathrm{i}y\right) = ? \tag{4.1}$$

Ayudas: (i) $x + \mathrm{i}y = \sqrt{x^2 + y^2}\, \exp\left[\,\mathrm{i}\tan^{-1}(y/x)\,\right]$, (ii) $\pi\delta(y) = \lim\limits_{x\to 0} x/(x^2 + y^2)$ (esta es una representación de la delta de Dirac), (iii) $\lim\limits_{x\to 0} \exp\left[\,\mathrm{i}\tan^{-1}(y/x)\,\right] = \exp\left[\,\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(y)\,\pi/2\,\right]$. Aquí tiene la

respuesta:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\lim_{x\to 0} x+\mathrm{i}y\right)=\mathrm{sgn}(y)\exp\left[\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(y)\frac{\pi}{2}\right]. \tag{4.2}$$

Note que el lado derecho de (4.2) es simplemente i para todo $y\in(-\infty,+\infty)$. Asimismo, el lado izquierdo es obviamente i, lo que confirma la veracidad del resultado (4.2).

5°) Sea la función (analítica) logaritmo neperiano $f(z)=\ln(z)=\ln(x+\mathrm{i}y)=\ln\left(|z|\right)+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)$, donde $|z|=\sqrt{x^2+y^2}>0$ y $\mathrm{Arg}(z)=\tan^{-1}\left(y/x\right)$, pero restringida a los valores $-\pi<\mathrm{Arg}(z)<+\pi$. (a) Demuestre la siguiente expresión:

$$\lim_{x\to 0}\ln(x+\mathrm{i}y)=\ln\left(|y|\right)-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\pi\,\Theta(y), \tag{5.1}$$

donde $\Theta(y)$ es la función de Heaviside. (b) Demuestre ahora que la derivada de la fórmula (5.1) con respecto a la variable y nos da el resultado:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{y-\mathrm{i}x}\equiv\frac{1}{y-\mathrm{i}0}=\mathrm{P.V.}\left(\frac{1}{y}\right)+\mathrm{i}\pi\,\delta(y), \tag{5.2}$$

donde, como es usual, $\mathrm{P.V.}$ representa el valor principal y $\delta(y)$ es la delta de Dirac. Ayuda: use sin temor el hecho que (en la teoría de funciones generalizadas) la derivada de un límite es el límite de la derivada. (c) Tome el complejo conjugado de la fórmula (5.2) y junto con (5.2) escriba finalmente una de las llamadas fórmulas de Sokhotskii:

$$\frac{1}{y\pm\mathrm{i}0}=\mathrm{P.V.}\left(\frac{1}{y}\right)\mp\mathrm{i}\pi\,\delta(y). \tag{5.3}$$

Nota: esta fórmula la demostramos en clase siguiendo un procedimiento bastante diferente al seguido aquí. (d) A partir de (5.3), y usando una conocida representación para la función delta de Dirac, demuestre la siguiente fórmula de Sokhotskii:

$$\frac{1}{y-\mathrm{i}0}-\frac{1}{y+\mathrm{i}0}=2\pi\mathrm{i}\delta(y)=\lim_{x\to 0}\frac{2\mathrm{i}x}{x^2+y^2}. \tag{5.4}$$

6°) Sea $\psi=\psi(x)$ una función sobre la cual actúa $\hat{p}^{-1}$, donde $\hat{p}=-\mathrm{i}\hbar\,\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ es el operador momentum. Sea $\phi=\phi(x)$ el resultado de esta operación:

$$\phi(x)=\hat{p}^{-1}\,\psi(x). \tag{6.1}$$

¿Cómo actúa $\hat{p}^{-1}$ sobre la función $\psi(x)$? Le diré como responder esta pregunta. Si $f(p)$ y $g(p)$ son, respectivamente, las transformadas de Fourier de $\psi(x)$ y $\phi(x)$, podemos escribir las siguientes relaciones:

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p\,f(p)\,\exp\left(+\mathrm{i}\frac{p}{\hbar}x\right)\;\Rightarrow\;f(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,\psi(x)\,\exp\left(-\mathrm{i}\frac{p}{\hbar}x\right) \tag{6.2}$$

y

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p\,g(p)\,\exp\left(+\mathrm{i}\frac{p}{\hbar}x\right)\;\Rightarrow\;g(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,\phi(x)\,\exp\left(-\mathrm{i}\frac{p}{\hbar}x\right). \tag{6.3}$$

Demuestre que

$$g(p) = p^{-1} f(p). \tag{6.4}$$

Multiplicando esta relación por $\exp(+\mathrm{i}px/\hbar)/\sqrt{2\pi\hbar}$, y luego integrando en p, se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p\, g(p)\, \exp\left(+\mathrm{i}\frac{p}{\hbar}x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p\, \frac{1}{p}\, f(p)\, \exp\left(+\mathrm{i}\frac{p}{\hbar}x\right),$$

o mejor

$$\phi(x) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p\, \frac{1}{p}\, \sin\left[\frac{p}{\hbar}(x - x')\right] \right\} \psi(x') \tag{6.5}$$

(donde se usaron expresiones incluidas en (6.2) y (6.3)). Demuestre que la fórmula (6.5) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\phi(x) = \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}x'\, \psi(x') - \frac{\mathrm{i}}{2\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x'\, \psi(x'). \tag{6.6}$$

Nota: la fórmula (6.4) muestra que la función $g(p)$ tiene, en general, un polo en $p = 0$. Para evitar este resultado, podría imponerse la condición $f(p = 0) = 0$, la cual implica que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x'\, \psi(x') = 0$. De esta forma, el resultado (6.6) puede escribirse así:

$$\phi(x) = \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}x'\, \psi(x'). \tag{6.7}$$

Es claro que el operador $\hat{p}^{-1}$ es un operador integral de la forma

$$\hat{p}^{-1} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}x'\, (\ ), \tag{6.8}$$

y actúa sobre una función de x' (que deberá colocarse en el interior del paréntesis en (6.8)). Nota final: verifique, usando la fórmula (6.7), que $\hat{p}\, \phi(x) = \psi(x)$.

7°) Como se discutió en clase, la delta de Dirac puede ser vista como el límite de una secuencia de funciones. Uno de esos límites es precisamente

$$\delta(x) = \lim_{N \to 0} \delta_N(x) = \lim_{N \to 0} \frac{1}{2N} \left[\, \Theta(x + N) - \Theta(x - N) \,\right], \tag{7.1}$$

donde $\Theta(x)$ es la función de Heaviside. (a) Demuestre el siguiente resultado:

$$\delta'(x) = \lim_{N \to 0} \delta'_N(x) = \lim_{N \to 0} \frac{1}{N^2} \left[\, \Theta(x + N) + \Theta(x - N) - 2\Theta(x) \,\right]. \tag{7.2}$$

(b) A partir de (7.2) encuentre una expresión para $\delta''(x)$ en términos de la delta de Dirac.