Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

MECÁNICA CUÁNTICA (2431)
http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicacuantica.html

Tarea 3
Preliminares
http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mc_t3.pdf

1°) (a) Demuestre la desigualdad de Schwarz (también llamada desigualdad de Cauchy -por los franceses- y desigualdad de Buniakowsky -por los rusos-),

$$|\langle\psi_1,\psi_2\rangle| \leq \| \psi_1 \| \| \psi_2 \| . \tag{1.1}$$

¿Cuando es válido el signo de igualdad? De una interpretación geométrica. (b) Demuestre la desigualdad triangular (también llamada desigualdad de Minkowsky),

$$\| \psi_1 + \psi_2 \| \leq \| \psi_1 \| + \| \psi_2 \| . \tag{1.2}$$

De una interpretación geométrica. (c) Del resultado anterior es obvio el siguiente resultado:

$$\| \psi_1 - \psi_2 \| \leq \| \psi_1 \| + \| \psi_2 \| . \tag{1.3}$$

Una cota inferior para la cantidad $\| \psi_1 - \psi_2 \|$ se puede obtener fácilmente, es la llamada desigualdad triangular inversa:

$$| \| \psi_1 \| - \| \psi_2 \| | \leq \| \psi_1 - \psi_2 \| . \tag{1.4}$$

Compruébela e interprétela geométricamente. Comentario: Las desigualdades son como la base del análisis, la más importante es seguramente la de Schwarz, que es esencial para la comprensión de las series de Fourier. La desigualdad triangular (así como la triangular inversa) es más general que la de Schwarz, esto es así ya que para aquella todo lo que uno necesita es algún espacio vectorial con una métrica, mientras que para la de Schwarz uno necesita un producto interno. Es decir, la desigualdad de Schwarz está relacionada intrínsecamente con la noción de ortogonalidad (Los matemáticos dicen que la desigualdad triangular es válida para todos los espacios de Banach de vectores o funciones, mientras que la de Schwarz está disponible solo en la subclase de espacios de Banach llamados espacios de Hilbert). (d) Sea $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ una función compleja de la variable real t. La integral de $z(t)$ sobre un intervalo $a \leq t \leq b$ verifica la siguiente desigualdad:

$$\left| \int_a^b \mathrm{d}t\, z(t) \right| \leq \int_a^b \mathrm{d}t\, |z(t)| \tag{1.5}$$

¡Demuéstrela! (e) Demuestre la llamada desigualdad ML,

$$\left| \int_C \mathrm{d}z f(z) \right| \leq \int_C |\mathrm{d}z| \, |f(z)| \leq ML, \tag{1.6}$$

donde $|f(z)| \leq M$, es decir, M es una cota superior de $|f(z)|$ sobre el camino C, y L es la longitud de C. (f) Sea $f(z)$ una función compleja de la variable compleja $z = R\exp(\mathrm{i}\theta)$ que satisface la desigualdad $|f(z)| \leq M/R^k$, donde $k > 0$ y $M = \mathrm{const}$. Demuestre la siguiente relación:

$$\lim_{R\to\infty} \int_C dz f(z) \exp(\mathrm{i}mz) = 0, \tag{1.7}$$

donde C es el semicírculo en el semiplano superior, y m es una constante positiva. Nota: se entiende que $f(z)$ es analítica en todos los puntos z del semiplano superior que están encima de C y sobre C. Otra nota: usted debe notar la importancia que tiene el hecho que $m > 0$. Si en cambio se tiene que $m < 0$, entonces el semicírculo C debe estar en el semiplano inferior. Nota final: este importante resultado se llama "el lema de Jordán" (toma el nombre de su inventor, el matemático francés Camille Jordan (1838-1922)).

2°) Considere la ecuación de Schrödinger unidimensional con un potencial delta atractivo

$$-\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \psi(x) - g\delta(x)\psi(x) = E\psi(x). \tag{2.1}$$

Como se demostró en clase, la delta de Dirac puede representarse como la derivada segunda de la función valor absoluto

$$\delta(x) = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2 |x|}{\mathrm{d}x^2}. \tag{2.2}$$

Sustituya esta expresión en (2.1) y divida la ecuación resultante por $\psi(x)$, además use el hecho que para el estado ligado la energía es negativa ($E = -|E|$). (a) A continuación demuestre la siguiente expresión

$$\frac{1}{\psi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{1}{\psi} \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} \right) + \frac{1}{\psi^2} \left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} \right)^2, \tag{2.3}$$

ahora úsela para eliminar el término que tiene la derivada segunda de $\psi(x)$ en la ecuación que obtuvo antes. Ayuda: Aquí tiene el resultado

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{1}{\psi} \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{m}g}{\hbar^2} \frac{\mathrm{d}\,|x|}{\mathrm{d}x} \right) + \frac{1}{\psi^2} \left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} \right)^2 = \frac{2\mathrm{m}\,|E|}{\hbar^2}. \tag{2.4}$$

(b) Anule el término que está más a la izquierda en (2.4) y resuelva esa ecuación diferencial. Escriba la autofunción para el estado ligado $\psi(x)$ y luego normalícela. (c) Regrese a lo que quedó de (2.4) y sustituya allí a la solución que obtuvo en (b). Ahora puede despejar la energía correspondiente al estado base ¿Obtuvo lo que esperaba? ¿Que le pareció este método? Si le interesó el problema, le recomiendo consultar la referencia: P. Bruskiewich, "A novel look at the one dimensional delta Schrödinger equation," *Gamma.* **138**, 22 (2005).

3°) Suponga conocidas las soluciones $w_\alpha(x)$ de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$-\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} w_\alpha(x) + V(x) w_\alpha(x) = E_\alpha w_\alpha(x), \tag{3.1}$$

las cuales satisfacen una relación de ortonormalidad "a la Dirac" $\langle w_\alpha, w_{\alpha'}\rangle = \delta(\alpha - \alpha')$. Por otro lado, necesitamos resolver la siguiente ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) + \lambda\delta(x)\psi(x) = E\psi(x), \tag{3.2}$$

donde λ es un parámetro real (el "strength de la delta"). Pues bien, la solución $\psi(x)$ de (3.2) se puede escribir en términos de las soluciones de (3.1) así:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\alpha\; c(\alpha)\, w_\alpha(x). \tag{3.3}$$

(a) Sustituya (3.3) en los dos primeros términos a la izquierda en (3.2). Ahora use la ecuación (3.1) para eliminar el término que tiene la derivada segunda así como el que tiene el potencial $V(x)$. Finalmente, multiplique escalarmente a la ecuación que obtuvo por $w_{\alpha'}(x)$ y despeje $c(\alpha')$. Nota: Si lo ha hecho bien, usted habrá encontrado la siguiente expresión para las soluciones de (3.2)

$$\psi(x) = \lambda\psi(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\alpha\; \frac{\bar{w}_\alpha(0)\, w_\alpha(x)}{E - E_\alpha}, \tag{3.4}$$

donde la barra corresponde a la conjugación compleja. La cantidad $\psi(0)$ se puede determinar de la condición de normalización para $\psi(x)$. (b) Suponga que $V(x) = 0$ y $\lambda \equiv -g < 0$ ¿cuales son las soluciones $w_\alpha(x)$ de (3.1) en este caso? (c) Encuentre $\psi(x)$. Si le interesó el problema, le recomiendo consultar la referencia: D. A. Atkinson y H. W. Crater, "An exact treatment of the Dirac delta function potential in the Schrödinger equation," *Am. J. Phys.* **43**, 301 (1975).

4°) En este ejercicio deseamos probar que la solución radial de la ecuación de Schrödinger (en tres dimensiones) para momentum angular $l = 0$,

$$R(r) \equiv \frac{1}{r}u(r), \tag{4.1}$$

no puede comportarse como $1/r$ en el origen (esta es la llamada solución irregular). (a) Tome la función

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \tag{4.2}$$

y calcule $\nabla^2 f$, es decir,

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(rf) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} \equiv -g. \tag{4.3}$$

Demuestre que en el límite $a \to 0$, g tiende a $4\pi\delta^3(\boldsymbol{r})$. Es decir, demuestre que: (i) para $r = 0$, $g \to \infty$ para $a \to 0$, (ii) para cualquier $r > 0$, $g \to 0$ para $a \to 0$,

$$\text{(iii)} \quad \int \mathrm{d}^3(\boldsymbol{r})\, g(r) = 4\pi\int_0^\infty \mathrm{d}r\, \frac{3a^2r^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} = 4\pi. \tag{4.4}$$

Por lo tanto, para $a \to 0$, $g \to 4\pi\delta^3(\boldsymbol{r})$ y se tiene que $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{r})$. (b) ¿Cómo es todo esto en dos dimensiones? Pues bien, en este caso la llamada solución irregular se comporta como $\ln(r)$. Usamos

$$f(r) = \ln\left(\sqrt{r^2 + a^2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(r^2 + a^2\right), \tag{4.5}$$

por lo tanto

$$\nabla^2 f = \frac{1}{2}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \ln\left(r^2 + a^2\right) = \frac{2a^2}{(r^2+a^2)^2} \equiv g. \tag{4.6}$$

Probemos ahora que g es proporcional a la delta de Dirac en el límite $a \to 0$: (i) de nuevo $g \to \infty$ para $r = 0$ con $a \to 0$. (ii) $g \to 0$ para $r > 0$ con $a \to 0$,

$$\text{(iii)} \int \mathrm{d}^2(\boldsymbol{r})\, g(r) = 2\pi \int_0^\infty \mathrm{d}r\, \frac{2a^2 r}{(r^2+a^2)^2} = 2\pi. \tag{4.7}$$

Por lo tanto, $g \to 2\pi\delta^2(\boldsymbol{r})$ para $a \to 0$.

5°) (a) Para una función $\psi(x)$ que se puede expandir en una serie de Taylor, muestre que

$$\psi(x + x_0) = \exp\left(\mathrm{i}\, x_0 \frac{\hat{p}}{\hbar}\right) \psi(x) \tag{5.1}$$

(donde x_0 es cualquier distancia constante y $\hat{p} = -\mathrm{i}\hbar d/dx$). Debido a (5.1), $\hat{p}/\hbar$ se llama el generador de las translaciones en el espacio. (b) De la misma forma, para una función de onda $\Psi(x,t)$ que se puede expandir en una serie de Taylor en la variable tiempo, muestre que

$$\Psi(x, t + t_0) = \exp\left(-\mathrm{i}\, t_0 \frac{\hat{H}}{\hbar}\right) \Psi(x,t) \tag{5.2}$$

(donde t_0 es cualquier tiempo constante y $\hat{H} = +\mathrm{i}\hbar\partial/\partial t$). Debido a (5.2), $-\hat{H}/\hbar$ es llamado el generador de las translaciones en el tiempo.