Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

MECÁNICA CUÁNTICA (2431)
http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicacuantica.html

Tarea 4
Preliminares
http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mc_t4.pdf

1°) Considere la siguiente matriz 2×2

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

(a) ¿Es unitaria? (b) ¿Cuales son sus autovalores y autovectores? (c) ¿Pueden ser reales estos autovalores? (d) ¿Son ortogonales los autovectores? (e) Encuentre una matriz $\hat{S}$ que diagonalice a $\hat{R}$.

2°) (a) Encuentre los autovalores y autovectores de la siguiente matriz:

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2\mathrm{i} & \mathrm{i} & 2\mathrm{i} \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

(b) Halle la matriz de similaridad $\hat{S}$ que diagonaliza a $\hat{M}$. Chequee esto explícitamente.

3°) (a) Resuelva el problema del movimiento de una partícula que se mueve bajo una fuerza constante en la representación de los momenta. (b) Cambie a la representación de las coordenadas y encuentre la correspondiente autofunción de la energía. Ayudas y respuestas: para un campo homogéneo, $V(x) = -Fx$, y la ecuación de Schrödinger es

$$\mathrm{i}\hbar F \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\phi(p) + \left(-\frac{p^2}{2m} + E\right)\phi(p) = 0. \tag{3.1}$$

La solución de esta ecuación es

$$\phi(p) \equiv \phi_E(p) = C \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar F}\left(\frac{p^3}{6m} - Ep\right)\right]. \tag{3.2}$$

Ya que el espectro es continuo la condición de normalización es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p\, \phi_E^*(p)\, \phi_{E'}(p) = \delta(E - E'), \tag{3.3}$$

de donde se obtiene $C = (2\pi\hbar F)^{-1/2}$. En la representación de las coordenadas la autofunción tiene la siguiente forma:

$$\psi(x) \equiv \psi_E(x) = \frac{\alpha}{\pi\sqrt{F}} \int_0^\infty \mathrm{d}u \, \cos\left(\frac{u^3}{3} - uq\right), \tag{3.4}$$

donde $q = \left(x + \frac{E}{F}\right)\alpha$ y $\alpha = (2mF\hbar^{-2})^{1/3}$.

4°) Demuestre la siguiente formulita:

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}, \tag{4.1}$$

siempre que $[[\hat{A},\hat{B}],\hat{A}] = [[\hat{A},\hat{B}],\hat{B}] = 0$.

5°) Las siguientes propiedades de la matriz exponencial podrían verificarse fácilmente:

(a) Si $\hat{K}$ es una matriz compleja $N \times N$, la serie $\exp(\hat{K}) = \hat{1} + \hat{K} + \hat{K}^2/2! + \hat{K}^3/3! + \cdots$ es siempre convergente;

(b) $\det(\exp(\hat{K})) = \exp(\mathrm{Tr}(\hat{K}))$;

(c) $\exp(\hat{K} + \hat{L}) = \exp(\hat{K})\exp(\hat{L})$, si $[\hat{K},\hat{L}] = \hat{0}$;

(d) $\exp(\hat{S}\hat{K}\hat{S}^{-1}) = \hat{S}\exp(\hat{K})\hat{S}^{-1}$;

(e) Si λ_1, λ_2, ..., λ_N son autovalores de $\hat{K}$, entonces $\exp(\lambda_1)$, $\exp(\lambda_2)$, ..., $\exp(\lambda_N)$ son los autovalores de $\exp(\hat{K})$;

(f) $\exp(\hat{K}^*) = (\exp(\hat{K}))^*$, $\exp(\hat{K}^{\mathrm{T}}) = (\exp(\hat{K}))^{\mathrm{T}}$, $\exp(\hat{K}^\dagger) = (\exp(\hat{K}))^\dagger$, $\exp(-\hat{K}) = (\exp(\hat{K}))^{-1}$ (donde $*$, T, y $\dagger$ representan, respectivamente, el complejo conjugado, la transpuesta, y el conjugado hermítico).

6°) Sean $\hat{A}$ y $\hat{B}$ dos operadores que no conmutan y α un "c-number". Nota: el término c-number, o número clásico (classical number), es una vieja nomenclatura usada por Dirac para referirse a números reales y complejos. Los operadores de la mecánica cuántica serían "q-numbers", o digamos, números cuánticos (quantum numbers). (a) Demuestre que

$$\exp(\alpha\hat{A})\,\hat{B}\,\exp(-\alpha\hat{A}) = \hat{B} + \alpha[\hat{A},\hat{B}] + \frac{\alpha^2}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \cdots. \tag{6.1}$$

Ayuda: defina la función de operadores $f(\alpha) \equiv \exp(\alpha\hat{A})\,\hat{B}\,\exp(-\alpha\hat{A})$ y expándala en una serie de Taylor alrededor de $\alpha = 0$. (b) Compruebe que en el caso particular en el que $[\hat{A},\hat{B}] = c$ (c es un c-number) se tiene que

$$\exp(\alpha\hat{A})\,\hat{B}\,\exp(-\alpha\hat{A}) = \hat{B} + \alpha c, \tag{6.2}$$

es decir, $\exp(\alpha\hat{A})$ actúa como un operador desplazamiento. (c) Suponga ahora que $\hat{A}$ y $\hat{B}$ satisfacen

$$[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] = [\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]] = 0. \tag{6.3}$$

Demuestre que

$$\exp[\alpha(\hat{A}+\hat{B})] = \exp(\alpha\hat{A})\,\exp(\alpha\hat{B})\,\exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}[\hat{A},\hat{B}]\right). \tag{6.4}$$

Esta relación es llamada fórmula de Glauber, de Weyl, y de Baker-Campbell-Haussdorf. (d) Demuestre el siguiente resultado:

$$\exp(\alpha\hat{A})\,f(\hat{B})\,\exp(-\alpha\hat{A}) = f\left(\exp(\alpha\hat{A})\,\hat{B}\,\exp(-\alpha\hat{A})\right). \tag{6.5}$$

Ayuda: demuestre primero la siguiente identidad: $[\exp(\alpha\hat{A})\,\hat{B}\,\exp(-\alpha\hat{A})\,]^n = \exp(\alpha\hat{A})\,\hat{B}^n\,\exp(-\alpha\hat{A})$.

7°) Considere un sistema físico cuyo espacio de estados tridimensional es "spanned" por la base ortonormal formada por los tres kets $|u_1\rangle$, $|u_2\rangle$ y $|u_3\rangle$. En la base de estos tres vectores, tomados en este orden, los dos operadores $\hat{H}$ y $\hat{B}$ están definidos por:

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = b \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{7.1}$$

donde ω_0 y b son constantes reales. (a) ¿Son $\hat{H}$ y $\hat{B}$ hermíticos? (b) Muestre que $\hat{H}$ y $\hat{B}$ conmutan. Encuentre una base de autovectores comunes a $\hat{H}$ y $\hat{B}$. (c) De los conjuntos de operadores: $\{\hat{H}\}$, $\{\hat{B}\}$, $\{\hat{H}, \hat{B}\}$, $\{\hat{H}^2, \hat{B}\}$ ¿cuales forman un C.S.C.O?

8°) Considere el mismo espacio de estados que el del ejercicio anterior. Defina dos operadores, $\hat{L}_z$ y $\hat{S}$, de la siguiente manera

$$\hat{L}_z\,|u_1\rangle = |u_1\rangle\,, \quad \hat{L}_z\,|u_2\rangle = 0, \quad \hat{L}_z\,|u_3\rangle = -\,|u_3\rangle\,, \tag{8.1}$$

$$\hat{S}\,|u_1\rangle = |u_3\rangle\,, \quad \hat{S}\,|u_2\rangle = |u_2\rangle\,, \quad \hat{S}\,|u_3\rangle = |u_1\rangle\,. \tag{8.2}$$

(a) Escribir las matrices que representan a los operadores $\hat{L}_z$, $\hat{L}_z^2$, $\hat{S}$ y $\hat{S}^2$, en la base $|u_k\rangle$ $(k = 1, 2, 3)$ ¿Son estos operadores observables? (b) ¿Forman $\hat{L}_z^2$ y $\hat{S}$ un C.S.C.O? Obtenga una base de autovectores comunes.

9°) Considere la expansión de un estado $|\,\psi\,\rangle$ en la base (continua) de autovectores de algún operador $|\,w_\alpha\,\rangle$, donde $-\infty < \alpha < +\infty$,

$$|\,\psi\,\rangle = \hat{1}\,|\,\psi\,\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\alpha\;\,|\,w_\alpha\,\rangle\langle\,w_\alpha\,|\;|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\alpha\,\langle\,w_\alpha\,|\,\psi\,\rangle\,|\,w_\alpha\,\rangle. \tag{9.1}$$

Los coeficientes de la expansión (9.1) deben ser de cuadrado integrable. Por ejemplo, si $|\,w_\alpha\,\rangle = |\,x\,\rangle$, es decir, si consideramos a los autovectores del operador $\hat{X}$ (que conforman a la llamada representación $|\,x\,\rangle$ o representación de la posición) entonces $\langle\,w_\alpha\,|\,\psi\,\rangle = \langle\,x\,|\,\psi\,\rangle = \psi(x)$ y decimos que $\psi(x)$ *es el estado en la representación de la posición*, además $\psi(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Nota: la representación de la posición resulta del isomorfismo entre $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{E}_x \subset \mathcal{E}$. De la misma forma, los autovectores del operador $\hat{P}$ son los $|\,w_\alpha\,\rangle = |\,p\,\rangle$, entonces $\langle\,w_\alpha\,|\,\psi\,\rangle = \langle\,p\,|\,\psi\,\rangle = \phi(p)$ *es el estado en la representación de los momenta* (por cierto, $\phi(p)$ es la transformada de Fourier de $\psi(x)$). (a) Encuentre los autovectores de $\hat{X}$ y $\hat{P}$ en la representación de la posición y en la representación de los momenta. (b) Como otro ejemplo de representación, considere el siguiente operador (que interpola linealmente entre el operador posición y el operador momentum):

$$\hat{S} = \alpha\hat{X} + (1-\alpha)\hat{P}, \tag{9.2}$$

donde $\alpha \in [0, 1]$ (en la escritura de (9.2) no hemos colocado los factores de escala que permiten que $\hat{X}$ y $\hat{P}$ sean adimensionales). Supongamos que los autovectores de $\hat{S}$ son los $|\,w_\alpha\,\rangle = |\,s\,\rangle$, entonces $\langle\,w_\alpha\,|\,\psi\,\rangle = \langle\,s\,|\,\psi\,\rangle = \eta(s)$ *es el estado en esta nueva representación*. Encuentre los autovectores de $\hat{S}$ en la representación de la posición. Ayuda: para evitar un excesivo uso de los símbolos que involucran a las representaciones, es conveniente escribir el problema de autovectores y autovalores para $\hat{S}$ así:

$$\hat{S}\,|\,\psi_s\,\rangle = s\,|\,\psi_s\,\rangle, \tag{9.3}$$

por lo tanto,

$$\langle\, x \mid \hat{S} \mid \psi_s \,\rangle = \langle\, x \mid \alpha\hat{X} + (1-\alpha)\hat{P} \mid \psi_s \,\rangle = \alpha\langle\, x \mid \hat{X} \mid \psi_s \,\rangle + (1-\alpha)\langle\, x \mid \hat{P} \mid \psi_s \,\rangle = s\langle\, x \mid \psi_s \,\rangle, \quad (9.4)$$

donde (haciendo $\hbar = 1$)

$$\langle\, x \mid \hat{X} \mid \psi_s \,\rangle = x\langle\, x \mid \psi_s \,\rangle = x\,\psi_s(x)\,, \qquad \langle\, x \mid \hat{P} \mid \psi_s \,\rangle = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\langle\, x \mid \psi_s \,\rangle = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi_s(x). \quad (9.5)$$

Sustituyendo estos resultados en la expresión (9.4) se obtiene una ecuación diferencial para las autofunciones de $\hat{S}$ en la representación de la posición, $\psi_s(x)$:

$$\left[\alpha x - \mathrm{i}(1-\alpha)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]\psi_s(x) = s\,\psi_s(x). \quad (9.6)$$

Resuelva esta ecuación y obtenga el valor de la constante arbitraria en $\psi_s(x)$ de tal forma que el autovector tienda al límite correcto cuando $\alpha \to 0$ y $\alpha \to 1$ (módulo una fase global). Use algunos de los resultados obtenidos en (a). Aquí tiene la respuesta:

$$\psi_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{s^2}{2\alpha} + \frac{\pi}{4}\right)\right]\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(x - \frac{s}{\alpha}\right)^2\right]. \quad (9.7)$$