Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

MECÁNICA CUÁNTICA (2431)
http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicacuantica.html

Tareas 5 y 6
Aplicando los postulados de la mecánica cuántica
http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mc_t5_t6.pdf

1°) Una partícula de masa m se mueve no-relativisticamente en una dimensión en un potencial dado por $V(x) = -a\delta(x)$, donde $\delta(x)$ es la delta de Dirac. La partícula esta ligada a este potencial. Encuentre el valor de x_0 para que la probabilidad de encontrar a la partícula en la región $\mid x \mid < x_0$ sea exactamente igual a $1/2$.

2°) Considere una partícula descrita por la siguiente función de onda

$$\Psi(x,t) = A \exp\left(-\frac{|x|}{L}\right) \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}t\right). \tag{2.1}$$

(a) Encuentre A de tal forma que $\Psi(x,t)$ esté normalizada. (b) Evalúe $\langle \hat{x} \rangle$, $\langle \hat{x}^2 \rangle$ y $\Delta\hat{x}$. (c) ¿Cual es la probabilidad de encontrar la partícula en la región $[-L, +L/2]$? ¿y en el intervalo $[+L, +\infty)$? (d) ¿Cual es la probabilidad de encontrar la partícula exactamente en $x = +3L$? (e) Intente calcular $\langle \hat{p} \rangle$ y $\langle \hat{p}^2 \rangle$. Nota: puede también usar la Transformada de Fourier para calcular primero a $\Phi(p,t)$ y luego a las cantidades $\langle \hat{p} \rangle$ y $\langle \hat{p}^2 \rangle$.

3°) En un problema unidimensional, considere una partícula en el estado

$$\psi(x) = N \frac{\exp\left(\mathrm{i}\frac{p_0}{\hbar}x\right)}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \tag{3.1}$$

donde a y p_0 son constantes reales y N es la constante de normalización. (a) Determine N para que $\psi(x)$ esté normalizada. (b) Se mide la posición de la partícula ¿cual es la probabilidad de encontrar un resultado entre $-a/\sqrt{3}$ y $+a/\sqrt{3}$? (c) Calcule el valor medio del momentum de una partícula que tiene a $\psi(x)$ como su función de onda.

4°) Considere una partícula de masa m sometida al potencial $V(x) = 0$, si $x \in (0, a)$, y $V(x) = +\infty$, si $x \in (-\infty, 0] \oplus [a, +\infty)$. Los $|\psi_n\rangle$ son los autoestados del Hamiltoniano $\hat{H}$ del sistema, y sus autovalores son $E_n = (\hbar^2/2\mathrm{m})(n\pi/a)^2$ (con $n = 1, 2, \ldots$). El estado de la partícula en el instante $t = 0$ es

$$|\psi(0)\rangle = a_1 |\psi_1\rangle + a_2 |\psi_2\rangle + a_3 |\psi_3\rangle + a_4 |\psi_4\rangle. \tag{4.1}$$

(a) ¿Cual es la probabilidad cuando se mide la energía de la partícula en el estado $|\psi(0)\rangle$ de encontrar un valor más pequeño que $6(\hbar^2/2\mathrm{m})(\pi/a)^2$? (b) ¿Cual es el valor medio y cual es la desviación estándar

de la energía de la partícula en el estado $|\psi(0)\rangle$? (c) Calcule el vector de estado $|\psi(t)\rangle$ en el instante t. Los resultados encontrados en (a) y (b) en el instante $t = 0$ ¿permanecen válidos en un tiempo arbitrario t? (d) Cuando se mide la energía, se encuentra el resultado $16(\hbar^2/2\mathrm{m})(\pi/a)^2$. Después de la medida ¿cual es el estado del sistema? ¿Cual es el resultado si la energía se mide de nuevo? Nota: ¡usted ya conoce los autoestados de este problema! ¿o no?

5°) Una partícula libre en el interior de una caja unidimensional ($0 \leq x \leq a$) tiene la función de onda inicial

$$\Psi(x, 0) = Ax(a - x). \tag{5.1}$$

(a) Normalice a $\Psi(x, 0)$ ¡Grafíquela! ¿Cual estado estacionario se parece más a $\Psi(x, 0)$? Sobre esa base, estime el valor de expectación de la energía. (b) Calcule $\langle \hat{H} \rangle$ en el tiempo $t = 0$ ¿Como es $\langle \hat{H} \rangle$ comparado con el estimado que hizo en la parte (a)? (c) Encuentre a $\Psi(x, t)$. Evalúe numéricamente a los coeficientes c_1 y c_2 que están presentes en el desarrollo

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right) \psi_n(x). \tag{5.2}$$

Usted ya posee los autovectores $\psi_n(x)$ y sus correspondientes autovalores E_n ¿cierto? Comente sobre lo obtenido y recuerde que, *grosso modo*, los c_n nos dicen la cantidad de ψ_n que hay en Ψ. (d) Suponga que se mide la energía en un tiempo $t > 0$ y se obtiene el valor E_3. Sabiendo que la inmediata repetición de la medida debe conducir al mismo valor ¿que puede decir sobre los coeficientes c_n después de la medida?

6°) (a) Repita el procedimiento hecho en clase para demostrar que la norma del vector de estado permanece constante (conservación de la probabilidad) pero esta vez use la ecuación de Schrödinger en la representación $|x\rangle$ ¿Encontró algo "diferente"? (b) Al derivar el resultado anterior usted supuso que V (la energía potencial) era real. Supongamos que ahora usted desea describir una partícula inestable que se desintegra espontáneamente con un tiempo de vida τ. En ese caso, la probabilidad total de encontrar la partícula en cualquier parte no debería ser constante, pero debería disminuir (digamos) con una rata exponencial

$$P(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, |\Psi(x, t)|^2 = \exp(-t/\tau). \tag{6.1}$$

Una cruda forma de derivar este resultado es asignarle a V una parte imaginaria $V = V_0 - \mathrm{i}\Gamma$, donde V_0 es la verdadera energía potencial y Γ es una constante real positiva. Demuestre que en este caso se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = -\frac{2\Gamma}{\hbar}P. \tag{6.2}$$

(c) Encuentre $P(t)$ y escriba el tiempo de vida de la partícula en términos de Γ.

7°) Considere los siguientes operadores sobre el espacio de Hilbert de las funciones de onda complejas de tres componentes:

$$\hat{L}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

(a) ¿Cuales son los valores posibles que uno podría obtener si se mide $\hat{L}_z$?

(b) Tome el estado para el cual $L_z = 1$. En este estado calcula $\langle \hat{L}_x \rangle$, $\langle \hat{L}_x^2 \rangle$ y $\Delta \hat{L}_x \equiv \sqrt{\langle \hat{L}_x^2 \rangle - \langle \hat{L}_x \rangle^2}$.
(c) Encuentre los autovalores y los autovectores de $\hat{L}_x$ en la base de la matriz $\hat{L}_z$.
(d) Si la partícula está en el estado con $L_z = -1$, y se mide $\hat{L}_x$ ¿cuales son los posibles resultados y sus probabilidades?
(e) Considere el estado

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

en la base de autovectores de $\hat{L}_z$. Si se mide $\hat{L}_z^2$ en este estado y se obtiene como resultado $+1$ ¿cual es el estado después de la medida? ¿Cuan probable era este resultado?
(f) Una partícula está en un estado para el cual las probabilidades son $\mathcal{P}(L_z = 1) = 1/4$, $\mathcal{P}(L_z = 0) = 1/2$ y $\mathcal{P}(L_z = -1) = 1/4$. Escribe el estado (normalizado) más general con esta propiedad. Ayuda: aquí tiene la respuesta

$$|\psi\rangle = \frac{\exp(\mathrm{i}\alpha)}{2} |L_z = 1\rangle + \frac{\exp(\mathrm{i}\beta)}{\sqrt{2}} |L_z = 0\rangle + \frac{\exp(\mathrm{i}\gamma)}{2} |L_z = -1\rangle \,. \tag{7.3}$$

Como se explicó en clase, si $|\psi\rangle$ es un estado normalizado, entonces el estado $\exp(\mathrm{i}\theta)\,|\psi\rangle$ es un estado normalizado y físicamente equivalente a $|\psi\rangle$. Pregunta: ¿son irrelevantes los factores $\exp(\mathrm{i}\alpha)$, $\exp(\mathrm{i}\beta)$ y $\exp(\mathrm{i}\gamma)$ en (7.3)? Calcula, por ejemplo, $\mathcal{P}(L_x = 0)$.

8°) Suponga que una partícula de espín $1/2$ se encuentra en el estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{8.1}$$

(a) Si se mide $\hat{S}_z$ ¿cuál es la probabilidad de obtener $+\hbar/2$? ¿y $-\hbar/2$? (b) Si usted mide $\hat{S}_x$, encuentre la probabilidad de obtener los valores $+\hbar/2$ y $-\hbar/2$. (c) Considere ahora el estado

$$|\psi\rangle = A \begin{pmatrix} 3\mathrm{i} \\ 4 \end{pmatrix}. \tag{8.2}$$

Determine la constante de normalización. (d) Encuentre los valores de expectación de $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ y $\hat{S}_z$. (e) Encuentre las "incertezas" $\Delta\hat{S}_x$, $\Delta\hat{S}_y$ y $\Delta\hat{S}_z$. (f) Confirme que sus resultados son consistentes con los tres principios de incerteza, es decir, con $\Delta\hat{S}_x\,\Delta\hat{S}_y \geq (\hbar/2)\,|\,\langle\hat{S}_z\rangle\,|$, y sus permutaciones cíclicas.

9°) **Las oscilaciones del neutrino (teoría estándar)** En este ejercicio reproduciremos la esencia de la teoría estándar de las oscilaciones del neutrino, donde se asume que los neutrinos son creados en un autoestado del momentum. Hasta ahora, los experimentos han verificado que existen tres "sabores" ("flavours") del neutrino: neutrino electrón, neutrino muón y neutrino tauón. Los denotaremos como ν_α, con $\alpha = e$, μ, τ. Diremos que existe una base de autoestados de sabor formada por los kets $|\,\nu_e\,\rangle$, $|\,\nu_\mu\,\rangle$, $|\,\nu_\tau\,\rangle$; y que también existe una base de autoestados de masa formada por los kets $|\,\nu_1\,\rangle$, $|\,\nu_2\,\rangle$, $|\,\nu_3\,\rangle$. Los autoestados de sabor no son autoestados de masa y no satisfacen la ecuación de Dirac, sin embargo, los primeros están relacionados con los segundos a través de la ecuación

$$|\,\nu_\alpha\,\rangle \equiv \sum_{k=1}^{3} U_{\alpha k}^{*}\,|\,\nu_k\,\rangle, \tag{9.1}$$

donde los $U_{\alpha k}$ conforman una matriz unitaria y el asterisco representa el complejo conjugado. Por ejemplo, el neutrino electrón es una mezcla mecanico-cuántica de las tres componentes de masa. Ya que un estado de neutrino masivo obedece la ecuación de Dirac, uno puede escribir

$$\mid \nu_k(t) \rangle = \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_k}{\hbar}t\right) \mid \nu_k(0) \rangle \equiv \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_k}{\hbar}t\right) \mid \nu_k \rangle, \tag{9.2}$$

donde $E_k = \sqrt{(c\mathbf{p})^2 + (\mathrm{m}_k c^2)^2}$, puesto que el estado está en un autoestado del momentum con valor $\mathbf{p}$. La evolución temporal de un autoestado de sabor viene dada por

$$\mid \nu_\alpha(t) \rangle \equiv \sum_{k=1}^{3} U^*_{\alpha k} \mid \nu_k(t) \rangle = \sum_{k=1}^{3} U^*_{\alpha k} \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_k}{\hbar}t\right) \mid \nu_k \rangle, \tag{9.3}$$

donde hemos hecho uso de la relación (9.1) pero en un tiempo arbitrario, y luego sustituimos allí la fórmula (9.2). Note ahora que, si se verifica la relación (9.1) entonces su inversa viene dada por

$$\mid \nu_k \rangle \equiv \sum_{\beta} U_{\beta k} \mid \nu_\beta \rangle. \tag{9.4}$$

En efecto (a continuación omitimos los símbolos de suma), ya que $\mid \nu_\alpha \rangle \equiv U^*_{\alpha k} \mid \nu_k \rangle$, entonces podemos escribir $\mid \nu_k \rangle \equiv M_{k\beta} \mid \nu_\beta \rangle$; y sustituyendo esta última relación en la anterior a esa se obtiene $\mid \nu_\alpha \rangle = U^*_{\alpha k} M_{k\beta} \mid \nu_\beta \rangle$

$$\Rightarrow \quad U^*_{\alpha k} M_{k\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \tag{9.5}$$

Como los $U_{\alpha k}$ conforman una matriz unitaria se tiene que $U_{\alpha k} U^\dagger_{k\beta} = \delta_{\alpha\beta} \Rightarrow U_{\alpha k} U^*_{\beta k} = \delta_{\alpha\beta}$

$$\Rightarrow \quad U^*_{\alpha k} U_{\beta k} = \delta_{\alpha\beta}. \tag{9.6}$$

Y comparando esta última relación con la (9.5), se obtiene que $M_{k\beta} = U_{\beta k}$. Sustituyendo la relación (9.4) en la (9.3) se obtiene finalmente

$$\mid \nu_\alpha(t) \rangle = \sum_{\beta} \sum_{k=1}^{3} U^*_{\alpha k} \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_k}{\hbar}t\right) U_{\beta k} \mid \nu_\beta \rangle. \tag{9.7}$$

(a) Calcule la probabilidad para que el sabor del neutrino cambie desde (un específico) β a (un específico) α (en un tiempo t). Ayuda: el estado final es

$$\mid \nu_\alpha(t) \rangle = \sum_{k=1}^{3} U^*_{\alpha k} \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_k}{\hbar}t\right) U_{\beta k} \mid \nu_\beta \rangle, \tag{9.8}$$

y el inicial es $\mid \nu_\beta \rangle$. La probabilidad viene dada por (el cuarto postulado de la mecánica cuántica)

$$\mathcal{P}_{\nu_\beta \to \nu_\alpha}(t) = \mid \langle \nu_\alpha(t) \mid \nu_\beta \rangle \mid^2 = \mid \langle \nu_\beta \mid \nu_\alpha(t) \rangle \mid^2 = \langle \nu_\beta \mid \nu_\alpha(t) \rangle^* \langle \nu_\beta \mid \nu_\alpha(t) \rangle. \tag{9.9}$$

Aquí tiene la respuesta:

$$\mathcal{P}_{\nu_\beta \to \nu_\alpha}(t) = \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} U^*_{\alpha k}\, U_{\beta k}\, U_{\alpha j}\, U^*_{\beta j} \exp\left[-\mathrm{i}\frac{(E_k - E_j)}{\hbar}t\right]. \tag{9.10}$$

(b) Demuestre que en el límite ultrarelativista, $c \mid \mathbf{p} \mid \gg \mathrm{m}c^2$, se tiene el siguiente resultado:

$$E_k - E_j = \frac{(\mathrm{m}_k^2 - \mathrm{m}_j^2)c^4}{2E}, \tag{9.11}$$

donde $E \equiv c \mid \mathbf{p} \mid$. Note que reemplazando en (9.10) el tiempo de propagación $t = L/c$, siendo L la distancia recorrida por el neutrino que (suponemos) viaja casi a la velocidad de la luz desde su fuente al punto de detección, y también el resultado (9.11), la probabilidad en (9.10) se convierte en

$$\mathcal{P}_{\nu_\beta \to \nu_\alpha}(t) = \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} U_{\alpha k}^* \, U_{\beta k} \, U_{\alpha j} \, U_{\beta j}^* \exp\left[-\mathrm{i} \frac{(\mathrm{m}_k^2 - \mathrm{m}_j^2)c^3}{2\hbar E} L \right]. \tag{9.12}$$

(c) Considere un modelito simplificado de solo dos neutrinos (ν_e y ν_μ), ignorando en este caso el tercer neutrino. Asuma que la relación (9.1) tiene la forma

$$\mid \nu_\alpha \rangle \equiv \sum_{k=1}^{2} U_{\alpha k}^* \mid \nu_k \rangle \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} \mid \nu_e \rangle \\ \mid \nu_\mu \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mid \nu_1 \rangle \\ \mid \nu_2 \rangle \end{bmatrix}. \tag{9.13}$$

Identifique las cantidades $U_{\alpha k}^*$ y no olvide la relación (9.6) ($\sum_k U_{\alpha k}^* U_{\beta k} = \delta_{\alpha\beta}$), ahora calcule la probabilidad para que el sabor del neutrino electrón, $\beta = e$, cambie a $\alpha = \mu$ (en un tiempo t). Aquí tiene la respuesta:

$$\mathcal{P}_{\nu_e \to \nu_\mu}(t) = \sin^2(2\theta) \sin^2\left[\frac{(\mathrm{m}_1^2 - \mathrm{m}_2^2)c^3}{4\hbar E} L \right]. \tag{9.14}$$

La probabilidad de arrancar con un neutrino electrón de energía E y detectarlo como un neutrino muón a la distancia L, es dependiente de la diferencia al cuadrado de las masas absolutas de los neutrinos y del ángulo θ que relaciona las bases de sabor con las de masa. Los experimentos han comprobado las oscilaciones de los sabores del neutrino, y por eso sabemos que las masas de los neutrinos no son nulas.