Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

MECÁNICA CLÁSICA (2425)

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicaclasica.html

Examen 3 (oral-escrito)
Cuerpos rígidos
Ecuaciones canónicas
Ecuación de Hamilton-Jacobi

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicaclasica(e3).pdf

Problemas escogidos de las Tareas 9 y 10 (prueba oral)

1°) Un cilindro sólido de masa m y radio a rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal y bajo la acción de una fuerza horizontal F aplicada en su centro. La componente I_{zz} del tensor de inercia del cilindro (coincidiendo la dirección z con el eje del cilindro) es $I_{zz} = ma^2/2$. Escriba (sin introducir un multiplicador de Lagrange): (a) La Lagrangiana del sistema. (b) Las ecuaciones de movimiento de Lagrange. (c) La posición del centro de masa del cilindro en función del tiempo ($x = x(t)$). [Anexo: (d) Responda las preguntas (a), (b) y (c) pero ahora use el multiplicador de Lagrange. (e) Resuelva el problema usando el formalismo hamiltoniano, con, y sin el multiplicador de Lagrange.]

2°) (a) Halle la Hamiltoniana de una partícula en coordenadas cilíndricas y esféricas. (b) Halle la Hamiltoniana de una partícula en un sistema de referencia animado de un movimiento de rotación uniforme. Por ejemplo, en el sistema que tiene coordenadas $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ que se relacionan con las coordenadas x, y y z por medio de

$$x = \bar{x}\cos(\omega t) - \bar{y}\sin(\omega t)\,, \quad y = \bar{x}\sin(\omega t) + \bar{y}\cos(\omega t)\,, \quad z = \bar{z}. \tag{2.1}$$

Encuentre las ecuaciones de movimiento de Hamilton y luego escriba las ecuaciones diferenciales de segundo orden (para $\bar{x}$ y $\bar{y}$) suponiendo que la energía potencial es una constante.

3°) Use el método de Hamilton-Jacobi para resolver el problema de una partícula de masa m en el campo $U(x) = kx^2/2$ (oscilador armónico unidimensional). Halle la posición de la partícula en función del tiempo $x(t)$.

Otros problemas (prueba escrita)

4°) Encuentre las componentes I_{xx}, I_{yy} y I_{zz} del tensor de inercia de una placa triangular delgada de catetos a y b, de masa m, con respecto a los ejes x, y y z, con origen O en $(0,0)$. Los vértices del triángulo son los puntos $(0,0)$, $(a,0)$ y $(0,b)$.

5°) Halle la energía cinética de un cilindro macizo de radio a y masa m que rueda sin deslizar en el interior de una superficie cilíndrica de radio R. Dato: $I_0 = ma^2/2$ es el momento de inercia de un cilindro con respecto al eje que pasa por el eje del cilindro.

6°) Un taco le da un golpe frontal a una bola de billar estacionaria a una altura h sobre el piso. (a) Encuentre una relación entre la velocidad angular y la velocidad del centro de masa de la bola justo inmediatamente despues del golpe. Ayuda: justo en el golpe la reacción de la superficie sobre la bola es perpendicular a la superficie, es decir, no tiene componente a lo largo de la dirección del movimiento. (b) Si la bola rueda sin deslizar desde el principio ¿cual debe ser la altura h en la que el taco golpea a la bola?

7°) Siendo la acción

$$S = \int dS = \int \left(\sum_{i=1}^{s} p_i \, dq_i - H dt \right), \tag{7.1}$$

muestre que las ecuaciones de Hamilton se pueden obtener haciendo $\delta S = 0$.