Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

MECÁNICA CLÁSICA (2425)

`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicaclasica.html`

Tarea 0
Preliminares

`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicaclasica(t0).pdf`

1°) Este problemita de mecánica trata con el fotón (que no tiene carga, ni masa en reposo). Como usted sabe, la gravedad es la fuerza dominante a gran escala, pero además, es una fuerza que afecta a toda partícula de la misma manera. Esta universalidad fue primero reconocida por Galileo Galilei, quien encontró que dos cuerpos cualesquiera caen con la misma velocidad. También se ha observado que la luz es deflectada por un campo gravitacional. Esta propiedad de la gravedad lleva a diversos problemas; por ejemplo, si una cantidad suficientemente grande de materia estuviera concentrada en alguna región, la luz que sale de allí podría terminar siendo arrastrada hacia el interior de esa misma región. Sorprendentemente, algo de esto fue notado por Laplace en 1798 al señalar que un cuerpo con aproximadamente la misma densidad de la Tierra pero con 250 veces el radio del Sol, podría impedir que sus rayos de luz nos alcancen por su gran poder de atracción. Como consecuencia de esto ¡los cuerpos más grandes en el universo podrían permanecer invisibles para nosotros! [Wow!] ¿Será verdad lo dicho por Laplace? Ayuda [tratamiento no-relativista]: el cuerpo tiene masa M (radio R) y atrae a un objeto (el rayo de luz) que tiene masa m. Como usted sabe, la ecuación de movimiento no depende de m. Al integrar esta ecuación se obtiene la siguiente relación:

$$v^2 = c^2 + 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right), \tag{1.1}$$

donde v es la velocidad del rayo de luz que trata de escapar del cuerpo masivo, c es la velocidad de la luz (o la velocidad del rayo de luz sobre la superficie del Sol), $G = 6,67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2$ es la constante de gravitación universal y r es la distancia que separa a m del centro del cuerpo masivo. Si suponemos que a una distancia $r \gg R$ el rayo de luz se detiene ($v = 0$), entonces se puede escribir la siguiente fórmula:

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \tag{1.2}$$

Ahora use la bien conocida expresión para la densidad (uniforme) del cuerpo masivo

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}, \tag{1.3}$$

y obtenga la siguiente expresión:

$$c = \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,\sqrt{\rho G}\,R. \tag{1.4}$$

Pues bien, si lo que se mencionó antes es verdad, entonces, cuando $R = 250\,R_\odot$, donde $R_\odot = 6,96\,\times$

$10^8\,\mathrm{m}$ es el radio del Sol y $\rho = \rho_{\oplus} = 5{,}515\,\mathrm{kg/m^3}$ es la densidad de la Tierra, se debería obtener de (1.4) un valor muy cercano a la velocidad de la luz en el vacio $c \simeq 3 \times 10^8\,\mathrm{m/seg}$. En conclusión ¿será cierto que

$$c = \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\sqrt{\rho_{\oplus} G}\,250\,R_{\odot}? \tag{1.5}$$

Nota: si le interesó el problema, puede consultar las páginas 2 y 365 del libro "The Large Scale Structure of Space-Time" por S. W. Hawking y G. F. R. Ellis (Cambridge University Press, 1994). Allí se presenta un camino ligeramente diferente del que aquí usamos para derivar el resultado (1.5).

2°) Recientemente (hace tres años aproximadamente), el joven de origen indio Shouryya Ray de 16 años de edad, obtuvo el segundo lugar en una competición para jovenes investigadores de secundaria en la sección de matemáticas e informática, en Alemania. Al informar de esta noticia, periodicos de todo el mundo mencionaron que Ray había resuelto un problema que fue propuesto por Newton hace más de 300 años. Con el pasar de los días se ha sabido que en el pasado otros investigadores estudiaron el mismo problema y dieron con su solución (aunque no exactamente como la planteó Ray). Se trata del problema del movimiento de un proyectil sometido a la gravedad y a una resistencia (por ejemplo, del aire) que es cuadrática en la rapidez. La intención de este problema es que usted repita los cálculos hechos por Ray y se divierta con el bonito procedimiento. La ecuación de movimiento para este problema es

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R}, \tag{2.1}$$

donde $g = -g\mathbf{j}$ es la gravedad, $\boldsymbol{R} = -R\cos(\theta)\mathbf{i} - R\sin(\theta)\mathbf{j}$ es la resistencia (siendo θ el ángulo que forma la recta tangente a la trayectoria (en cualquier punto) con respecto al eje x), y $\boldsymbol{V} = d\boldsymbol{r}/dt = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ es el vector velocidad (Hemos usado aquí la misma notación que usó Ray, es decir, $u = u(t)$ es la componente x de la velocidad, y $v = v(t)$ es la componente y de la velocidad). Las condiciones iniciales son $u(0) \equiv u_0 > 0$ y $v(0) \equiv v_0 > 0$ (por ejemplo). Además, supondremos que la resistencia es proporcional a V^2, es decir, $R = \alpha V^2 = \alpha(u^2 + v^2)$ (siendo α una constante de proporcionalidad). (a) Demuestre que u y v satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{du}{dt} + \alpha u\sqrt{u^2 + v^2} = 0\,, \qquad \frac{dv}{dt} + \alpha v\sqrt{u^2 + v^2} = -g. \tag{2.2}$$

(b) Considere el siguiente cambio (que ha sido usado, por cierto, desde principios del siglo XVIII):

$$\psi \equiv \frac{v}{u}. \tag{2.3}$$

Ahora, demuestre que a partir de (2.3) y (2.2) se obtiene el resultado

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{g}{u}. \tag{2.4}$$

(c) Use ahora la primera de las ecuaciones en (2.2), y la relación que sale de diferenciar (2.4), para encontrar la siguiente ecuación diferencial (no-lineal) para ψ:

$$\frac{d^2\psi}{dt} + \alpha g\sqrt{1 + \psi^2} = 0. \tag{2.5}$$

(d) Integre (2.5) una vez (haciendo una cuadratura) y obtenga la ecuación

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \alpha g \int^{\psi} dy\sqrt{1+y^2} = \text{const.} \tag{2.6}$$

Use ahora la siguiente integral indefinida

$$\int dx\,\sqrt{1+x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\sinh^{-1}(x), \tag{2.7}$$

y los resultados (2.3) y (2.4) para obtener a partir de (2.6) el resultado que precisamente obtuvo Ray, es decir,

$$\frac{1}{2}\frac{g^2}{u^2} + \frac{\alpha g}{2}\left[\frac{v}{u^2}\sqrt{u^2+v^2} + \sinh^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)\right] = \text{const.} \tag{2.8}$$

Nota: en realidad el lado izquierdo de la expresión dada en (2.8) es una de las constantes de movimiento para este problema, que además es función unicamente de las componentes x y y de la velocidad.

3°) Imagine que usted se encuentra en la azotea de una torre de altura h sobre la superficie de la Tierra. Demuestre que la distancia que usted puede ver a lo largo de la superficie de la Tierra es aproximadamente $s = \sqrt{2hR}$, donde R es el radio de la Tierra. Ayuda: demuestre que $h/R = \sec(\theta) - 1$ (donde $\theta = s/R$) y encuentre dos términos de la serie para $\sec(\theta) = 1/\cos(\theta)$. Muestre también que la distancia s en millas es aproximadamente $s = \sqrt{3h/2}$, con h en pies. [El texto de este problema fue tomado de la excelente referencia: M. L. Boas, Mathematical Methods in the Physical Sciences, 2nd ed (John Wiley & Sons, New York, 1983), p. 41.]

4°) (a) Demuestre que una piedra se encuentra lo más lejos del origen cuando su (vector) velocidad es perpendicular a su vector posición. (b) Demuestre que la ecuación cuadrática para el tiempo t en el cual esto ocurre es:

$$t^2 - \frac{3v_0\sin(\theta)}{g}t + \frac{2v_0^2}{g^2} = 0. \tag{4.1}$$

(c) Demuestre además que esto no ocurre (es decir, que $\boldsymbol{v}(t)$ y $\boldsymbol{r}(t)$ sean perpendiculares) para ángulos de lanzamiento de la piedra que satisfacen la desigualdad $\theta < \arcsin(\sqrt{8/9}) \approx 70,5°$.

5°) El problema clásico del proyectil en ausencia de aire se discute en cualquier libro de mecánica elemental. Si se dispara el proyectil con un ángulo de $45°$, el rango del proyectil, para cualquier velocidad inicial, es máximo. (a) Encuentre el ángulo θ con el cual el proyectil debe ser lanzado para que la longitud recorrida por el proyectil sea máxima (respuesta: $\theta \approx 56,46°$. Además, la ecuación que proporciona la longitud recorrida por el proyectil en función del ángulo θ viene dada por:

$$L(\theta) = \frac{v_0^2}{g}\left[\sin(\theta) + \cos^2(\theta)\ln\left(\frac{1+\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)\right]). \tag{5.1}$$

(b) ¿Para cual ángulo el tiempo de vuelo es máximo? (c) Encuentre el ángulo θ para el cual el área bajo la trayectoria que sigue el proyectil es máxima? (respuesta: $\theta = 60°$).

6°) Más sobre el problema clásico del proyectil: Demuestre que la curva que une los puntos de máxima altura en las diversas parábolas del movimiento del movimiento del proyectil con la misma velocidad inicial v_0, pero con diferentes ángulos de lanzamiento, es una elipse ¿cual es la excentricidad ϵ de esta elipse? (respuesta: $\epsilon = \sqrt{3}/2$).

7°) Este es un problema de dinámica relativista. Se tiene una partícula de masa m a la cual se le proporciona una velocidad horizontal inicial v_0 hacia la derecha. Si la partícula esta sometida a una fuerza constante de magnitud F (perpendicular a la velocidad inicial y apuntando siempre hacia abajo). (a) Encuentre la ecuación para la trayectoria seguida por la partícula ($y = y(x)$). (b) ¿En que se convierte la trayectoria si suponemos que $v_0 \ll c$? (c es la velocidad de la luz). Ayuda: la ecuación de la trayectoria viene dada por:

$$y(x) = \frac{\sqrt{(cp_0)^2 + (mc^2)^2}}{F} \left[1 - \cosh\left(\frac{Fx}{cp_0}\right) \right], \tag{7.1}$$

donde

$$p_0 = \frac{mv_0}{\sqrt{1 - (\frac{v_0}{c})^2}}. \tag{7.2}$$

8°) Considere el problema de una partícula de masa m colocada inicialmente en el punto más alto de una esfera lisa de radio R. Si la partícula, inicialmente en reposo, se desplaza ligeramente para que deslice sobre la esfera, es facil obtener el punto en que se separa de la esfera. Si ahora la partícula tiene una rapidez inicial $v_0 \leq \sqrt{gR}$ en la parte superior de la esfera, encuentre el punto donde la partícula se separa de la esfera ¿Por qué se debe cumplir que $v_0 \leq \sqrt{gR}$?

9°) Una persona descansa sobre un sistema plataforma-polea. Las masas de la plataforma, la persona y la polea son M, m, y μ, respectivamente. La cuerda no tiene masa. La persona tira de la cuerda para tener una aceleración a hacia arriba. (a) ¿Cual es la tensión en la cuerda? (b) ¿Cual es la fuerza normal entre la persona y la plataforma? (c) ¿Cual es la tensión en la cuerda que conecta a la polea con la plataforma? Aquí tiene las respuestas: (a) $T = (M + m + \mu)(g + a)$. (b) $N = (M + 2m + \mu)(g + a)$. (c) $f = (2M + 2m + \mu)(g + a)$.

10°) Una pelota es lanzada directamente hacia arriba y alcanza una altura h. Esta cae desde arriba y rebota repetidamente sobre el piso. Después de cada rebote, la pelota regresa a una cierta fracción f de su altura previa. (a) Encuentre la distancia total viajada, y también el tiempo total, antes que la pelota alcance el reposo. (b) ¿Cual es la velocidad promedio? Aquí tiene las respuestas: (a) $d = 2h/(1 - f)$ y $T = \sqrt{8h/g}\,(1 - \sqrt{f})^{-1}$. (b) La velocidad promedio es simplemente d/T.

11°) (a) Su usted pinta un punto sobre el borde de una llanta que rueda sin deslizar, las coordenadas del punto podrían ser escritas como

$$\boldsymbol{r}(\theta) = x(\theta)\mathbf{i} + y(\theta)\mathbf{j} = (R\theta + R\sin(\theta))\mathbf{i} + (R + R\cos(\theta))\mathbf{j} \tag{11.1}$$

¡Demuéstrelo! La trayectoria del punto se llama *cicloide*. Asuma que la rueda esta rodando con rapidez constante, lo cual implica que $\theta = \omega t$. (b) Encuentre la velocidad y la aceleración del punto. (c) En el instante en el que el punto se encuentra en la parte superior de la rueda, se podría considerar que este punto se esta moviendo a lo largo del arco de una circunferencia ¿Cual es el radio de esta circunferencia en términos de R? Ayuda: usted conoce a $\boldsymbol{v}$ y a $\boldsymbol{a}$.