Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

MECÁNICA CLÁSICA (2425)

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicaclasica.html

Tarea 1
Preliminares
El principio de la mínima acción
Las ecuaciones de Lagrange

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicaclasica(t1).pdf

1°) Demuestre que la componente de un vector $\boldsymbol{a}$ en la dirección ortogonal a un vector $\boldsymbol{b}$ es

$$\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a} - \frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}}{b^2} = \frac{1}{b^2}\,\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}). \tag{1.1}$$

2°) Si una partícula tiene velocidad $\boldsymbol{v}$ y aceleración $\boldsymbol{a}$ a lo largo de una curva en el espacio, demuestre que el radio de curvatura de su trayectoria se da numericamente por

$$R = \frac{v^3}{\|\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}\,\|}. \tag{2.1}$$

3°) Se dispara un proyectil con velocidad inicial $\boldsymbol{v}_0$ formando un ángulo θ con la horizontal. Encuentre el vector posición en función del tiempo y la ecuación de la trayectoria suponiendo que además del peso existe una fuerza de rozamiento que es proporcional a la velocidad, $\boldsymbol{R} = -k\boldsymbol{v}$ $(k > 0)$.

4°) Muestre que la ecuación de Lagrange de "primera especie",

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad (k = 1, 2, \ldots, s), \tag{4.1}$$

se puede escribir en la forma

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_k} - 2\frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad (k = 1, 2, \ldots, s). \tag{4.2}$$

Estas ecuaciones son conocidas como la forma de *Nielsen* de las ecuaciones de Lagrange.

5°) Demuestre que para una sola partícula con masa constante, la ecuación de movimiento implica la siguiente ecuación diferencial para la energía cinética:

$$\frac{dT}{dt} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}, \tag{5.1}$$

mientras que si la masa varia con el tiempo la correspondiente ecuación es

$$\frac{d(mT)}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{p}. \tag{5.2}$$

6°) Sea q un conjunto de coordenadas generalizadas independientes para un sistema de s grados de libertad, con la Lagrangiana $L = L(q, \dot{q}, t)$. Suponga que se transforma a otro conjunto de coordenadas independientes Q por medio de las ecuaciones de transformación $q_k = q_k(Q_1, Q_2, \dots, Q_s, t)$, $k = 1, 2, \dots, s$. Muestre que si el Lagrangiano se expresa como una función de las Q, $\dot{Q}$ y t (usando las ecuaciones de transformación), entonces L satisface las ecuaciones de Lagrange con respecto a las s coordenadas Q, es decir,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} - \frac{\partial L}{\partial Q_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, s). \tag{6.1}$$

Nota: ¡no confunda a las Q con la fuerza generalizada asociada a la coordenada generalizada q!

7°) Si L es una Lagrangiana para un sistema de s grados de libertad, el cual satisface las ecuaciones de Lagrange, muestre que

$$L' = L + \frac{d}{dt} f(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \tag{7.1}$$

también satisface las ecuaciones de Lagrange, donde f es cualquier función arbitraria (pero diferenciable) de sus argumentos.

8°) Si la masa M de un resorte no es despreciable en comparación con la masa m pegada de este ¿Cual es el periodo del movimiento? Note que las diferentes partes del resorte toman parte en el movimiento en diferentes grados, sin embargo, ese movimiento es equivalente al de un resorte sin masa acoplado a una masa que ahora es m más un peso adicional igual a un tercio de la masa del resorte.

9°) Se conectan mediante un resorte de constante κ a dos masas, m_1 y m_2. Las masas pueden deslizarse sin rozamiento sobre un plano. Encuentre las ecuaciones de movimiento y las posibles frecuencias de los modos normales.

10°) Una pelotita de masa m desliza sin fricción a lo largo de un cable el cual tiene la forma de la parábola $y = Ax^2$, con eje vertical en la dirección del campo gravitatorio de La Tierra, $\boldsymbol{g}$. (a) Encuentre la Lagrangiana, tomando como coordenada generalizada el desplazamiento horizontal x. (b) Escriba la ecuación de movimiento de Lagrange.

11°) Haga todos los problemas del primer capítulo del libro “Mecánica” de Landau y Lifshitz. Vea la bibliografía.