Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

MECÁNICA CLÁSICA (2425)

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicaclasica.html

Tarea 10
Ecuaciones canónicas
Ecuación de Hamilton-Jacobi

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicaclasica(t10).pdf

1°) Haga los problemas del capítulo VII - secciones § 40, § 42 y § 44 - del libro "Mecánica" de Landau y Lifshitz. Vea la bibliografía.

2°) (a) Halle la Hamiltoniana de una partícula en coordenadas cilíndricas y esféricas. (b) Halle la Hamiltoniana de una partícula en un sistema de referencia animado de un movimiento de rotación uniforme. Por ejemplo, en el sistema que tiene coordenadas $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ que se relacionan con las coordenadas x, y y z por medio de

$$x = \bar{x}\cos(\omega t) - \bar{y}\sin(\omega t)\,, \quad y = \bar{x}\sin(\omega t) + \bar{y}\cos(\omega t)\,, \quad z = \bar{z}. \tag{2.1}$$

Encuentre las ecuaciones de movimiento de Hamilton y luego escriba las ecuaciones diferenciales de segundo orden (para $\bar{x}$ y $\bar{y}$) suponiendo que la energía potencial es una constante.

3°) Considere el problema de una partícula de masa m que baja sin rozamiento por un plano inclinado un ángulo θ. Estúdielo usando las ecuaciones de Hamilton. Nota: Si lo desea incluya el vínculo en la Lagrangiana.

4°) Considere el problema de un péndulo simple. Escriba la Lagrangiana con su correspondiente vínculo y multiplicador de Lagrange λ en coordenadas cartesianas. (a) Halle la Hamiltoniana y las ecuaciones de movimiento de Hamilton para este problema. (b) Escriba el multiplicador de Lagrange en función de las variables canónicas. (c) Encuentre expresiones para las componentes x y y de la fuerza neta que actúa sobre la masa. (d) Encuentre la ecuación diferencial para el ángulo θ que forma el péndulo con la vertical. (e) Demuestre que el multiplicador de Lagrange es proporcional a la magnitud de la tensión de la cuerda.

5°) Si $[F, G]$ es el paréntesis de Poisson para dos magnitudes cualesquiera F y G, demuestre que

$$\text{(a)}\ \frac{\partial}{\partial t}[F, G] = \left[\frac{\partial F}{\partial t}, G\right] + \left[F, \frac{\partial G}{\partial t}\right], \tag{5.1}$$

$$\text{(b)}\ \frac{d}{dt}[F, G] = \left[\frac{dF}{dt}, G\right] + \left[F, \frac{dG}{dt}\right]. \tag{5.2}$$

Este último resultado permite demostrar el llamado teorema de Poisson en el caso general. (c) Intente aplicar este teorema al problema de una partícula de masa m que se mueve en el plano $x - y$ sometida a la acción de una fuerza constante y uniforme $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$. Intente obtener (si es posible) cada constante de movimiento a partir de las otras dos. (d) Recuerde que si una constante de movimiento no depende explícitamente del tiempo entonces el paréntesis de Poisson formado por esta constante y la Hamiltoniana debe anularse ¿Puede verificar esto?

6°) La Lagrangiana para una partícula relativista de masa en reposo m, moviéndose sobre el eje x con energía potencial $U(x)$, puede escribirse así

$$L = -mc^2\sqrt{1-\left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2} + mc^2 - U(x). \tag{6.1}$$

(a) Compruebe que en el llamado límite no-relativista ($c \gg |\ \dot{x}\ |$) esta expresión para L se reduce a la usual expresión no-relativista. (b) Halle la Hamiltoniana a partir de la Lagrangiana. (c) Compruebe que en el límite no-relativista, la expresión que obtuvo para H se reduce a la fórmula usual (claro, si lo hizo bien). Ayuda: En ese límite $mc^2 \gg c \mid p \mid$. (d) Escriba las ecuaciones de Hamilton para este problema. Usando la relación

$$\frac{d}{dt}F = [H, F] + \frac{\partial}{\partial t}F, \tag{6.2}$$

donde F es una función que depende de las q, las p y el tiempo; exprese $\dot{x}$ y $\dot{p}$ en términos del corchete de Poisson de la Hamiltoniana con la correspondiente variable canónica. (e) Use ahora solo la definición del corchete de Poisson para calcular $[H, x]$ y $[H, p]$. Compare con los resultados que obtuvo en (d).

7°) Use los métodos de Hamilton-Jacobi para resolver el problema de una partícula en un campo de fuerza central que depende del inverso del cuadrado.

8°) Establezca y resuelva la ecuación de Hamilton-Jacobi para el movimiento de una partícula de masa m que se desliza hacia abajo sin rozamiento sobre un plano inclinado de ángulo θ. (a) Determine la posición de la partícula en función del tiempo. (b) Usando únicamente este formalismo, encuentre la energía de la partícula.

9°) Establezca y resuelva la ecuación de Hamilton-Jacobi en el movimiento de un proyectil lanzado con rapidez v_0 y formando un ángulo θ con la horizontal. Encuentre la ecuación de la trayectoria.

10°) Use el método de Hamilton-Jacobi para resolver el problema de una partícula de masa m en el campo $U(x) = kx^2/2$ (oscilador armónico unidimensional). Halle la posición de la partícula en función del tiempo $x(t)$.

11°) Siendo la acción

$$S = \int dS = \int \left(\sum_{i=1}^{s} p_i\, dq_i - H dt\right), \tag{11.1}$$

muestre que las ecuaciones de Hamilton se pueden obtener haciendo $\delta S = 0$.