Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

MECÁNICA CLÁSICA (2425)

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicaclasica.html

Tarea 2
El principio de la mínima acción
Las ecuaciones de Lagrange
Nociones de cálculo variacional

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicaclasica(t2).pdf

1°) Una partícula libre de masa m se mueve en una dirección arrancando desde el origen y llegando a la posición l en un tiempo T. La trayectoria debe entonces satisfacer las condiciones $x(0) = 0$ y $x(T) = l$. (a) Encuentre la posición en función del tiempo, $x = x(t)$. (b) Encuentre la acción. (c) Suponga ahora una trayectoria más general de la forma $x = x(t) = a+bt+t^2$ e imponga las condiciones $x(0) = 0$ y $x(T) = l$. (d) Halle la acción. (e) Encuentre las condiciones que hacen mínima esta última acción y compruebe que esto implica el resultado obtenido en (a). (f) Repita todo este procedimiento considerando ahora que la partícula experimenta una aceleración uniforme $+g$ en el tiempo T arrancando desde el reposo. Nota: en este último caso la energía potencial es $U = U(x) = -mgx$.

2°) (a) Determine la función $y = y(x)$ que minimiza la integral

$$\mathrm{I}[y(x)] \equiv \int_0^1 dx\, F(y, y', x) = \int_0^1 dx\, \left(1 + (y'(x))^2\right), \tag{2.1}$$

y que además satisface las condiciones de frontera $y(0) = 0$ y $y(1) = 1$. (b) Con la solución $y = y(x)$ que encontró en la parte (a), y escogiendo a la función $\eta = \eta(x) = x(1-x)$ (la cual satisface $\eta(0) = \eta(1) = 0$), calcule la siguiente integral:

$$\mathrm{I}[\epsilon] \equiv \int_0^1 dx\, F(y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta', x) = \int_0^1 dx\, \left(1 + (y'(x) + \epsilon\eta'(x))^2\right), \tag{2.2}$$

y luego verifique directamente que $d\mathrm{I}/d\epsilon = 0$ cuando $\epsilon = 0$. (c) Haga el cambio $y(x) = x + u(x)$ en la integral de la parte (a) y encuentre la $u = u(x)$ que minimiza la integral ¿Qué condición de frontera debe satisfacer la función $u(x)$?

3°) Demuestre que una condición necesaria para que

$$\mathrm{I} = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y, y', y'', x) \tag{3.1}$$

sea un extremo, es que

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0 \tag{3.2}$$

¿Puede generalizar este resultado?

4°) Si la función integrando, F, de la integral

$$\mathrm{I} = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y, y', x), \tag{4.1}$$

es explícitamente la derivada total con respecto a x de alguna función de x y y ¿qué forma toma la ecuación de Euler-Lagrange? Nota: puede demostrarse que una condición necesaria y suficiente para que la ecuación de Euler-Lagrange se satisfaga identicamente es que la función integrando sea explícitamente la derivada respecto a x de alguna función $G = G(y, x)$.

5°) Una curva C de longitud l une los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Encuentre la forma de C para que el área limitada por C, por las rectas $x = x_1$ y $x = x_2$, y por el eje x, sea un máximo.

6°) Se desea encontrar la forma de una curva sobre un plano, que tenga los puntos extremos fijos de forma tal que su momento de inercia con respecto a un eje perpendicular al plano y que pase por un origen fijo, sea mínimo. (a) Usando coordenadas polares (r, θ), demuestre que el problema es equivalente a minimizar la integral

$$\mathrm{I} = \int_{r_1}^{r_2} dr\, r^2 \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}, \tag{6.1}$$

donde los extremos fijos del alambre son (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2). (b) Escriba la ecuación de Euler-Lagrange. (c) Resuelva la ecuación obtenida en (b). Nota: usted deberá obtener algo como $r^3 = c_1 \sec(3\theta + c_2)$, donde c_1 y c_2 se determinan teniendo en cuenta que la curva pasa a través de los puntos fijos.

7°) (a) Encuentre una expresión integral que dé la distancia entre los puntos (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) que están expresados en coordenadas polares. (b) Use la ecuación de Euler-Lagrange para encontrar la curva que minimiza la integral de la parte (a) ¿Qué función $r = r(\theta)$ encontró? (c) ¿Qué curva es? ¡Demuéstrelo! La siguiente integral le podría ser útil:

$$\int dx\, \frac{1}{x\sqrt{x^2 - c^2}} = \frac{1}{c} \cos^{-1}\left(\frac{c}{x}\right). \tag{7.1}$$

8°) La Lagrangiana para una partícula relativista de masa en reposo m, moviéndose sobre el eje x con energía potencial $U(x)$, puede escribirse así:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2} + mc^2 - U(x). \tag{8.1}$$

(a) Encuentre la ecuación de movimiento usando las ecuaciones de Euler-Lagrange. (b) Integre una vez la ecuación de movimiento que obtuvo en la parte (a). Esta última solución esta relacionada con la energía de la partícula, así que, escoja adecuadamente la constante de movimiento de tal forma que en el límite no-relativista ($|\dot{x}| \ll c$) la expresión para la energía se reduzca a la expresión usual.

9°) De todas las curvas que circundan una región dada de área A ¿cual es la que tiene menor longitud? Discútase la relación de este problema con el problema de encontrar la curva con longitud conocida que encierra un área máxima.