Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

MECÁNICA CLÁSICA (2425)

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicaclasica.html

Tarea 3
El principio de la mínima acción
Las ecuaciones de Lagrange
Nociones de cálculo variacional

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicaclasica(t3).pdf

1°) Existe un principio físico que establece que un sistema mecánico en equilibrio estable esta caracterizado por una energía potencial mínima consistente con sus vínculos. Podemos aplicar este resultado al problema de determinar la forma de una cuerda perfectamente flexible de densidad uniforme que cuelga en reposo por sus extremos fijos. Suponiendo que la cuerda cuelga en un plano vertical, sea $y = y(x)$ un miembro representativo del agregado de todas las posibles configuraciones que pueden ser asumidas por la cuerda, y que sos consistentes con el hecho que sus extremos están fijos y su longitud total es l. Como es usual, la coordenada x se mide horizontalmente en el plano vertical y y es la distancia hacia arriba desde una linea horizontal de referencia, fija. Si σ es la densidad lineal de la cuerda, encuentre: (a) La energía potencial (relativa a $y = 0$) de un elemento de longitud ds en (x, y). (b) La energía potencial total de la cuerda en la configuración arbitraria $y = y(x)$. (c) Construya el Lagrangiano recordando que existe una restricción que proviene de la longitud constante de la cuerda. (d) Aplique las ecuaciones de Euler-Lagrange y obtenga la curva que minimiza la energía potencial.

2°) Escriba la Lagrangiana y las ecuaciones de movimiento para el problema del péndulo simple (masa m suspendida de una cuerda de masa despreciable y de longitud l), pero en coordenadas cartesianas. Introduzca la ecuación de vínculo por medio de un multiplicador de Lagrange λ. (b) Demuestre que λ es proporcional a la fuerza que la cuerda le hace a la masa en el punto de contacto entre ambas. (c) A partir de las relaciones que usted tiene, halle la ecuación diferencial que debe satisfacer el ángulo que forma la cuerda con la vertical.

3°) Una partícula de masa m esta costreñida a moverse dentro de un tubo delgado sin rozamiento el cual esta rotando con velocidad angular constante ω en un plano horizontal $x - y$ alrededor de un eje vertical fijo que pasa por O (suponga que la masa tiene un peso despreciable, $mg \approx 0$). Resuelva este problema en coordenadas cartesianas y en coordenadas polares usando las ecuaciones de Lagrange, e introduciendo el correspondiente multiplicador de Lagrange λ. Suponga que la masa parte del reposo y que se encuentra inicialmente a una distancia r_0 del origen.

4°) Como se demostró en clase, la Lagrangiana de un sistema cerrado con s grados de libertad tiene la forma

$$L = T - U = \frac{1}{2}\sum_{i,j} f_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - U(q). \tag{4.1}$$

Use la expresión para T dada aquí arriba y calcule $\partial T/\partial \dot{q}_k$, luego multiplique esta expresión por $\dot{q}_k$ y sume sobre el índice k. Demuestre que

$$T = \frac{1}{2}\sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k. \tag{4.2}$$

Como se vió en clase, este resultado le permite a uno demostrar que la cantidad $E = T + U$ es una constante de movimiento. Esto último es así porque se verifica la siguiente relación:

$$\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L = \text{const.} \tag{4.3}$$

5°) Derive la ecuación de movimiento de Lagrange para un disco delgado uniforme de radio R que rueda sin deslizar sobre un plano horizontal bajo la acción de una fuerza horizontal $\boldsymbol{F}$ aplicada en su centro.

6°) Use el formalismo lagrangiano para encontrar la tensión en la cuerda de una máquina de Atwood.

7°) El movimiento de una partícula de masa m es descrito por las ecuaciones de Lagrange con la siguiente Lagrangiana:

$$L = \exp\left(\frac{\alpha t}{m}\right)(T - U), \tag{7.1}$$

donde α es una constante, $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ es la energía cinética, y $U = U(x, y, z)$ es la energía potencial. Escriba las ecuaciones de movimiento e interprete.

8°) Un sistema con dos grados de libertad (x, y) es descrito por la siguiente Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}m(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(ax^2 + 2bxy + cy^2), \tag{8.1}$$

donde a, b, y c son constantes, con $b^2 \neq ac$. Escriba las ecuaciones de movimiento de Lagrange e identifique al sistema. Considere en particular los casos: (i) $a = c = 1$ con $b = 0$, (ii) $a = c = 0$ con $b = 1$, y (iii) $a = -c = 1$ con $b = 0$.

9°) Una masita m desliza sin fricción a lo largo de un cable con la forma de una cicloide

$$x = x(\varphi) = B(\varphi - \sin(\varphi)), \quad y = y(\varphi) = B(1 - \cos(\varphi)). \tag{9.1}$$

La gravedad g actua verticalmente y tiene el mismo sentido que el eje y. (a) Encuentre el desplazamiento s a lo largo de la cicloide medido desde el fondo ($\varphi = \pi$) en términos del parámetro φ. (b) Escriba la Lagrangiana usando s como una coordenada generalizada, y muestre que el movimiento es armónico simple en s con período independiente de la amplitud. De esta forma, el tiempo requerido por la masita, arrancando desde el reposo, para deslizarse desde cualquier punto sobre la cicloide, hasta el fondo, es independiente del punto de partida ¿Cual es ese tiempo? Respuesta: ese tiempo es $t = \tau/4$, donde $\tau = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{4a/g}$ es el período.