Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

MECÁNICA CLÁSICA (2425)

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicaclasica.html

Tarea 4
El principio de la mínima acción
Las ecuaciones de Lagrange
Nociones de cálculo variacional
Teoremas de conservación

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicaclasica(t4).pdf

1°) Haga todos los problemas del segundo capítulo del libro "Mecánica" de Landau y Lifshitz. Vea la bibliografía. [Si lo desea, lea también la sección § 10. de ese libro, que trata con el tema "Analogías mecánicas".]

2°) El sistema consiste de una masa m que esta colocada sobre un plano inclinado móvil (una cuña) de masa M que puede deslizarse sin rozamiento sobre un suelo horizontal. Tampoco hay fricción entre m y M. Como se demostró en clase, si se aplica la segunda ley de Newton al movimiento en x y y de m, y al movimiento en X de M se obtienen las siguientes ecuaciones (¡compruebe que estas son las ecuaciones que se obtuvieron en clase!):

$$F\sin(\theta) - ma_x = 0 \quad (a_x = \ddot{x}), \tag{2.1}$$

$$F\cos(\theta) - mg - ma_y = 0 \quad (a_y = \ddot{y}), \tag{2.2}$$

$$-F\sin(\theta) - MA_x = 0 \quad (A_x = \ddot{X}), \tag{2.3}$$

y adicionalmente, debido a que la masa m desliza a lo largo del plano inclinado, existe un vínculo que relaciona a las tres coordenadas x, y y X:

$$(a_x - A_x)\tan(\theta) + a_y = 0. \tag{2.4}$$

Este sistema de cuatro ecuaciones se puede resolver a mano en unos diez minutos (más o menos) ¿Le gustaría resolverlo con el programa de cómputo Maple ©? Pues bien, aquí tiene la secuencia de comandos que le permitirá resolver el sistema en unos once minutos (más o menos) [I'm just kidding...]:

```
> restart;
> eq1:=F*sin(theta)-m*ax=0:
> eq2:=F*cos(theta)-m*g-m*ay=0:
> eq3:=-F*sin(theta)-M*Ax=0:
> eq4:=(ax-Ax)*tan(theta)+ay=0:
> sol:=simplify(solve({eq1,eq2,eq3,eq4},{ax,ay,Ax,F}));
```

Esto le dará la siguiente respuesta:

$$sol := \{Ax = \frac{m\,g\cos(\theta)\sin(\theta)}{-M-m+m\cos(\theta)^2},\ F = -\frac{m\,g\cos(\theta)\,M}{-M-m+m\cos(\theta)^2},$$
$$ax = -\frac{g\cos(\theta)\,M\sin(\theta)}{-M-m+m\cos(\theta)^2},\ ay = -\frac{(-1+\cos(\theta)^2)\,g\,(M+m)}{-M-m+m\cos(\theta)^2}\}$$

Si ahora le pide a Maple © que sustituya las soluciones que obtuvo en las ecuaciones (2.1)-(2.4), obtendrá lo siguiente:

> simplify(subs(sol,{eq1,eq2,eq3,eq4}));

$\{0 = 0\}$

Dos casos límite que valen la pena chequear son $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$. Esto lo puede hacer con los siguientes comandos:

> simplify(subs(theta=0,sol));

$\{Ax = 0,\ F = m\,g,\ ay = 0,\ ax = 0\}$

> simplify(subs(theta=Pi/2,sol));

$\{Ax = 0,\ ax = 0,\ F = 0,\ ay = -g\}$

Para investigar más sobre la solución de este problema, asignamos valores a las cantidades desconocidas:

> assign(sol);

Miremos ahora al caso límite de una masa que se desliza sobre un plano inclinado fijo. Para obtener una respuesta a partir de Maple ©, hacemos $M \to \infty$ en la magnitud de la aceleración de la masa m, así:

> limit(sqrt(ax^2+ay^2),M=infinity);

$\sqrt{g^2\cos(\theta)^2\sin(\theta)^2 + g^2 + g^2\cos(\theta)^4 - 2\,g^2\cos(\theta)^2}$

> simplify(limit(sqrt(ax^2+ay^2),M=infinity));

$\sqrt{-g^2\,(-1+\cos(\theta)^2)}$

Note que al simplificar, Maple © tiene preferencia por la función $\cos^2$ más que por $\sin^2$, esto es una desventaja del programa y lo obliga a uno a terminar las cuentas con las manos.

Finalmente, la solución del problema se resume en las siguientes ecuaciones:

$$a_x = \frac{Mg\cos(\theta)\sin(\theta)}{M + m\sin^2(\theta)}, \tag{2.5}$$

$$a_y = -\frac{(m+M)g\sin^2(\theta)}{M + m\sin^2(\theta)}, \tag{2.6}$$

$$A_x = -\frac{mg\cos(\theta)\sin(\theta)}{M + m\sin^2(\theta)}, \tag{2.7}$$

$$F = \frac{mMg\cos(\theta)}{M + m\sin^2(\theta)}. \tag{2.8}$$

Note que $MA_x = -ma_x$, lo que es una consecuencia de la tercera ley de Newton. Esto lo puede verificar con el siguiente comando de Maple ©:

> simplify(M*Ax+m*ax);

0

El resultado da cero ya que previamente a ax y a Ax se les asignó sus valores apropiados.

3°) Considere a una partícula de masa m que se mueve en el plano $x-y$ sometida a la acción de una fuerza constante y uniforme $\boldsymbol{F}=F_x\mathbf{i}+F_y\mathbf{j}$. (a) Escriba la Lagrangiana para este sistema y luego las dos ecuaciones de movimiento. (b) Integre una primera vez cada ecuación de movimiento y escriba $\dot{x}(t)$ y $\dot{y}(t)$. Exprese la constante de integración en términos de $\dot{x}(0)$ y $\dot{y}(0)$. (c) Integre una vez más las ecuaciones de movimiento y exprese $x(t)$ y $y(t)$ en términos de $x(0)$ y $\dot{x}(0)$, y $y(0)$ y $\dot{y}(0)$, respectivamente. (d) Fíjese bien, ahora usted tiene las soluciones de las ecuaciones de movimiento $x(t)$ y $y(t)$ y también sus derivadas primeras $\dot{x}(t)$ y $\dot{y}(t)$. Trate de encontrar relaciones entre estas cantidades que no dependan explícitamente del tiempo, por ejemplo, encuentre $x(t)-x(0)$ ¿qué tiene en el lado derecho? Intente escribir esta relación como $f(x(t),\dot{x}(t))=f(x(0),\dot{x}(0))$ ¿lo logró? Recuerde que siempre hay $2s-1$ constantes de movimiento independientes para un sistema mecánico cerrado con s grados de libertad ¿Cuantas relaciones del tipo $f(x(t),\dot{x}(t))=f(x(0),\dot{x}(0))$ encontró?

4°) Una partícula de masa m está sometida a la fuerza

$$F_x=-kx\,,\quad F_y=-ky\,,\quad F_z=0. \tag{4.1}$$

Inicialmente, $\dot{z}=0$, de manera que el movimiento se realiza en un plano (como el plano $z=0$). (a) Encuentre las $2s-1$ constantes de movimiento para este problema. (b) Derive respecto del tiempo cada una de estas cantidades y compruebe que en efecto son constantes de movimiento. (c) Si $F_x=-k_1x$, $F_y=-k_2y$ y $F_z=0$ ¿qué ocurre con la componente z del momentum angular? Explique.

5°) Considere al oscilador armónico isotrópico dos-dimensional. (a) Demuestre que las siguientes cuatro cantidades son constantes de movimiento:

$$H_1\equiv\frac{1}{2m}p_x^2+\frac{1}{2}kx^2, \tag{5.1}$$

$$H_2\equiv\frac{1}{2m}p_y^2+\frac{1}{2}ky^2, \tag{5.2}$$

$$L_3\equiv xp_y-yp_x, \tag{5.3}$$

$$R_3\equiv xy+\frac{p_xp_y}{mk}. \tag{5.4}$$

Sin embargo, estas no son independientes (note que en este problema se deben tener solo $2s-1=2\cdot 2-1=3$ constantes de movimiento independientes). (b) En efecto, demuestre que la siguiente relación es satisfecha por H_1, H_2, L_3 y R_3:

$$H_1^2+H_2^2+\frac{k}{2m}L_3^2+\frac{k^2}{2}R_3^2=(H_1+H_2)^2. \tag{5.5}$$

6°) Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de la gravedad sobre la superficie interna del paraboloide de revolución $x^2+y^2=az$ el cual se supone sin rozamiento. (a) Obtenga las ecuaciones de movimiento. Ayuda: use coordenadas cilíndricas y recuerde que es un problema con un vínculo. (b) Demuestre que la partícula describirá un círculo horizontal en el plano $z=h$ siempre y cuando se le imprima una velocidad angular de magnitud igual a $\omega=\sqrt{2g/a}$.

7°) Aplique el teorema del virial para obtener la energía total de un cuerpo en movimiento bajo una energía potencial de la forma $U(r)=c\,r^{-n}$. Exprese su resultado en términos del valor medio de la energía cinética ¿Para qué valores de n es positiva la energía total?