Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

MECÁNICA CLÁSICA (2425)

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicaclasica.html

Tarea 5
Las ecuaciones de Lagrange
Teoremas de conservación
Integración de las ecuaciones de movimiento

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicaclasica(t5).pdf

1°) Haga los problemas del tercer capítulo - secciones § 11 y § 13 - del libro "Mecánica" de Landau y Lifshitz. Vea la bibliografía.

2°) Considere los siguientes potenciales repulsivos:

$$V(x) = -gx^n, \quad g > 0, \quad n = 3, 4. \tag{2.1}$$

Suponga que la partícula clásica arranca en $x = 0$ con energía $E > 0$. (a) Encuentre una expresión que proporcione el tiempo T que tarda la partícula en alcanzar el infinito ($x = +\infty$). (b) Demuestre que T satisface la desigualdad $T < \infty$, de esta forma, la partícula alcanza $+\infty$ en un tiempo finito. (c) Demuestre que, en el caso $n = 4$ la partícula puede incluso alcanzar el punto $x = -\infty$ pero cuando $n = 3$ la partícula nunca puede alcanzar ese punto. Nota: cuando $n = 4$ la partícula es reflejada y regresa al origen en un tiempo finito, así que la posición promedio de la partícula (en tiempo) es cerca del origen. Todas las autofunciones del correspondiente Hamiltoniano cuántico son de cuadrado integrable y el espectro de todas las extensiones auto-adjuntas de ese operador es discreto (de hecho, los índices de defecto son $(2, 2)$). Cuando $n = 3$ la partícula nunca alcanza el punto $x = -\infty$. De esta forma, solo se deben especificar condiciones de frontera en $x = +\infty$ (en este caso los índices de defecto son $(1, 1)$). La moraleja de esta historia es que existen buenas razones clásicas cuando un operador candidato a observable no es auto-adjunto pero tiene extensiones auto-adjuntas.

3°) Una partícula de masa m se mueve sobre el eje x bajo la acción de una fuerza de atracción hacia el origen O dada por (a) $\boldsymbol{F} = -kx^{-1}\mathbf{i}$, donde $k > 0$. Si la partícula parte del reposo en $x = a > 0$, encuentre el tiempo que necesita para llegar a O. Ayuda: si hace el cambio correcto en la integral que le proporciona este tiempo, podrá expresar su resultado en términos de la función Gamma. (b) Trabaje este mismo problema pero considerando que $\boldsymbol{F} = -kx^{-2}\mathbf{i}$.

4°) Un cometa se encuentra en algún instante en reposo con respecto al Sol. El cometa se encuentra a una distancia de $x_0 = 50{,}000\,\mathrm{UA}$ del Sol ($1\,\mathrm{UA} = 1,495\times 10^{11}\,\mathrm{mt}$). Supongamos ahora que el cometa se mueve solo en respuesta a la atracción gravitatoria del Sol. Determine el tiempo (en años) que transcurre desde que el cometa empieza a caer hasta que se encuentra a una distancia de $1\,\mathrm{UA}$ del Sol. Ayuda: si no se quiere meter en problemas tendrá que pensar en resolver la integral habilmente. Compare los órdenes de magnitud, aproxime, integre, y si quiere, vuelva a aproximar. Use: $G = 6,668 \times 10^{-11}\,\mathrm{Nt^2 mt^2 kg^{-2}}$ y $M_{\mathrm{Sol}} = 1,99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$. Aquí tiene una respuesta aproximada:

$$T \approx \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{2GM_{\mathrm{Sol}}}}\,x_0^{3/2}. \tag{4.1}$$

5°) Como se demostró en clase, el período T, es decir, el tiempo durante el cual la partícula va de x_1 a x_2 y vuelve (existe un pozo de potencial entre los puntos x_1 y x_2), viene dado por

$$T(E) = \sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)} dx\,\frac{1}{\sqrt{E - U(x)}}, \tag{5.1}$$

donde los límites x_1 y x_2 son las raices de la ecuación $E = U(x)$ para el valor dado de E. Cuando se estudian los llamados métodos Hamiltonianos surge una cantidad llamada la variable de acción $J(E)$, que en una dimensión y en coordenadas cartesianas esta definida por la siguiente integral de fase:

$$J(E) \equiv \oint dx\, p(x, E), \tag{5.2}$$

donde $p(x, E) = \sqrt{2m(E - U(x))}$ es el momentum y la integral se toma sobre la verdadera trayectoria de la partícula durante un período simple del movimiento. (a) Compruebe que la integral se puede escribir así

$$J(E) = 2\int_{x_1(E)}^{x_2(E)} dx\,\sqrt{2m(E - U(x))}. \tag{5.3}$$

(b) Encuentre la derivada de J con respecto a la energía E ¿Qué encontró? ¿Cómo se relaciona J con $T(E)$? Justifique cada paso. (c) Encuentre $J(E)$ para el oscilador armónico simple. Usted sabe mucho sobre este problema, por ejemplo, la energía es $E = kA^2/2$, donde A es la amplitud del movimiento. Ayuda: la siguiente integral le será muy útil:

$$\int dx\,\sqrt{A^2 - x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{A^2 - x^2} + \frac{A^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{A}\right). \tag{5.4}$$

(d) Use el resultado encontrado en (b) para derivar el período del oscilador ¿Encontró lo que esperaba? (e) Calcule J para el problema de una partícula libre ($U(x) = 0$) confinada en el interior de una caja unidimensional ubicada entre $x = 0$ y $x = L$. Ahora aplique la fórmula encontrada en (b) para obtener el tiempo que tarda la partícula en ir desde una pared y regresar.