Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

MECÁNICA CLÁSICA (2425)

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicaclasica.html

Tarea 6
Integración de las ecuaciones de movimiento
El problema de dos cuerpos con interacción central
El problema de Kepler

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicaclasica(t6).pdf

1°) Haga los problemas del tercer capítulo - secciones § 14 y § 15 - del libro "Mecánica" de Landau y Lifshitz. Vea la bibliografía.

2°) (a) Escriba la energía de un cuerpo de masa m que se mueve en una órbita circular en torno a otro. Escriba esta cantidad en términos de α (recuerde que la energía potencial es $U(r) = -\alpha/r$), del momentum angular M_z, y de su masa. (b) Escriba la energía de un cuerpo que se mueve en una órbita cualquiera. Exprese esta cantidad en términos de m, M_z, α, r y $\dot{r}$. (c) Demuestre que, en lo que al movimiento radial se refiere, la partícula se mueve en una energía potencial efectiva $U_{\text{ef}}(r)$. Encuentre esta función. (d) Encuentre el mínimo valor que toma $U_{\text{ef}}(r)$. Compare con el resultado obtenido en (a) ¿Esperaba este resultado?

3°) (a) Halle la fuerza necesaria $f(r)$ para hacer que una partícula describa la lemniscata $r^2 = a^2\cos(2\theta)$. Respuesta: $f(r) \sim 1/r^7$. (b) Repita para la órbita circular $r = 2a\cos(\theta)$. Respuesta: $f(r) \sim 1/r^5$ y el centro de fuerza está en $x = y = 0$, es decir, el centro pasa por la misma circunferencia. (c) Si se conoce la órbita o la trayectoria de una partícula, entonces uno puede encontrar el correspondiente campo central. Si la órbita viene dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, encuentre una ecuación que le proporcione la fuerza central $f(r) = -dU(r)/dr$. Es de mencionar que, dada una órbita, existen muchos campos de fuerza para los cuales esa órbita es posible. Sin embargo, si un campo de fuerzas centrales existe, ese es el único que existe. (d) Compruebe que si el Sol está en el foco de una elipse, la ley de fuerza es $f(r) \sim 1/r^2$. (e) Si el Sol está en el centro de una elipse, la ley de fuerza es $f(r) \sim r$. (f) Si el Sol está en el polo de una espiral, la ley de fuerza es $f(r) \sim 1/r^3$. Ayuda: la espiral es la curva $r(\theta) = \exp(-\theta)$ y el centro de fuerza esta localizado en $r = 0$. (g) Demuestre que las órbitas $r(\theta) = \exp(-\theta)$ y $r(\theta) = 1/\theta$ son ambas posibles para el caso de un campo de fuerza inverso del cubo. (h) Demuestre que no hay un campo de fuerza central que permita a una partícula moverse en una linea recta. Ayuda: demuestre primero que si la órbita de la partícula que se mueve en el campo de fuerza central viene dada por $\theta = \theta(r)$, entonces la ley de fuerza es

$$f(r) \sim -\frac{2\theta' + r\theta'' + r^2(\theta')^3}{r^5(\theta')^3}, \tag{3.1}$$

donde la prima denota diferenciación con respecto a r.

4°) Como se demostró en clase, si la energía potencial se define mediante $U(r) = -\alpha/r$, es decir, si la ley de fuerza es del inverso del cuadrado, entonces la trayectoria de la partícula es una cónica. La energía y el momentum angular son constantes de movimiento a lo largo de la trayectoria. Si la excentricidad verifica $0 < \epsilon < 1$, entonces la cónica es una elipse. En ese caso, la energía verifica

$$-\frac{m\alpha^2}{2M_z^2} < E < 0. \tag{4.1}$$

En efecto, la energía de una partícula que se mueve en una elipse es $E = -\alpha/2a$ (a es la longitud del semi-eje mayor). En el llamado problema de un cuerpo de la mecánica celeste se asume que el Sol, de masa M, se encuentra en reposo en el origen del sistema de coordenadas (foco de la elipse). Un planeta de masa m se mueve en el campo gravitatorio del Sol. En ese caso $\alpha = GmM$. (a) Demuestre que las velocidades en el perihelio y en el afelio son, respectivamente,

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{GM}{a}\left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right)} \quad \text{y} \quad v_{\max} = \sqrt{\frac{GM}{a}\left(\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right)}. \tag{4.2}$$

Note que $\min$ y $\max$ se refieren a la distancia mínima y máxima al Sol, es decir, $v_{\min} > v_{\max}$, como es de esperarse para $\epsilon \neq 0$. Para el planeta Tierra, $\epsilon = 0,0167$ y $a = 1\,\mathrm{UA}$. Para el planeta Marte, $\epsilon = 0,0933$ y $a = 1,524\,\mathrm{UA}$. (b) Calcule estas velocidades para la Tierra y Marte.

5°) Como se demostró en clase, a partir de la expresión para la energía E de una partícula en un campo central, y expresando $\dot{\theta}$ en función de la componente z del momentum angular M_z, se obtiene la siguiente expresión que nos da la distancia r de la partícula al centro como una función implícita del tiempo,

$$t(r) = \int^r dr\, \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M_z^2}{m^2 r^2}}} + \text{const}. \tag{5.1}$$

(a) Compruebe este resultado. Considere ahora el campo para el problema de Kepler $U(r) = -\alpha/r$ ($\alpha = GmM$), y órbitas elípticas. (b) Demuestre que la fórmula (5.1) puede escribirse así:

$$t(r) = \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \int^r dr\, \frac{r}{\sqrt{\epsilon^2 a^2 - (r-a)^2}} + \text{const}, \tag{5.2}$$

donde ϵ es la excentricidad de la órbita y a es la longitud del semi-eje mayor. Ayuda: use las relaciones

$$E = -\frac{\alpha}{2a} \quad \text{y} \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM_z^2}{m\alpha^2}}. \tag{5.3}$$

A continuación haga la siguiente escogencia que le permitirá resolver la integral (5.2):

$$r = a[\,1 - \epsilon\cos(\psi)\,]. \tag{5.4}$$

El ángulo ψ es llamado "la anomalía excéntrica" y cubre el intervalo de 0 a 2π ($0 \leq \psi < 2\pi$), de la misma forma que el ángulo θ en la ecuación de la trayectoria. De esta forma, una revolución completa sobre la elipse corresponde a una variación del parámetro ψ de 0 a 2π. La distancia al perihelio se obtiene haciendo $\psi = 0$, y al afelio $\psi = \pi$. (c) Sustituya la relación (5.4) en $t(r)$ y encuentre t en función de ψ ($t(\psi)$). Imponga además la condición $t(\psi = 0) = 0$ (esto significa que la partícula arranca en el perihelio). (d) Halle el período de la partícula usando la relación obtenida en (c). (e) Las coordenadas cartesianas, $x = r\cos(\theta)$ y $y = r\sin(\theta)$, también pueden expresarse en función del parámetro ψ (estando los ejes x e y dirigidos según los semi-ejes mayor y menor de la elipse, respectivamente). Demuestre que

$$x = a[\cos(\psi) - \epsilon] \quad \text{y} \quad y = a\sqrt{1-\epsilon^2}\sin(\psi). \tag{5.5}$$

Ayuda: arranque con la ecuación para la trayectoria, donde el parámetro de la elipse es $p = a(1-\epsilon^2)$. Use también el resultado (5.4) y no olvide que $r^2 = x^2 + y^2$. (f) Haciendo uso de (5.4) y de la ecuación de la trayectoria $r = r(\theta)$, demuestre que la relación entre los ángulos θ y ψ viene dada por

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}\tan\left(\frac{\psi}{2}\right). \tag{5.6}$$

Ayuda: use la fórmula $\tan^2(\mu/2) = 1 - \cos(\mu)/(1+\cos(\mu))$.

6°) La teoría de la relatividad general de Einstein implica una pequeña corrección a la fuerza newtoniana. Según aquella, la magnitud de la fuerza gravitatoria sobre un planeta de masa m que se mueve con velocidad v en una órbita circular de radio R (y debida a un gran cuerpo de masa M) es

$$F = \frac{GmM}{R^2}\left(1 + 6\frac{v^2}{c^2}\right), \tag{6.1}$$

siendo c la velocidad de la luz. (a) Demuestre que si el período newtoniano para el planeta de masa m es T_{N}, el período real es aproximadamente

$$T = T_{\mathrm{N}}\left(1 - \frac{12\pi^2 R^2}{c^2 T_{\mathrm{N}}^2}\right). \tag{6.2}$$

Demuestre que, en cada revolución, el planeta avanza un ángulo

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2 R} = \frac{24\pi^3 R^2}{c^2 T_{\mathrm{N}}^2}. \tag{6.3}$$

(c) Aplique estos resultados al planeta Mercurio y verifique que el avance acumulado de la órbita después de un siglo es aproximadamente de $43''$ de arco.

7°) Para una partícula moviéndose en un potencial central $U(r)$, la densidad de probabilidad de posición es dada por

$$P(r) = \frac{2}{T}\frac{1}{\dot{r}(r)}, \tag{7.1}$$

donde $\dot{r}(r)$ es la componente radial de la velocidad. Los puntos de retorno de la trayectoria se obtienen de $\dot{r} = 0$. (a) Encuentre estos dos puntos para el potencial Kepleriano $U(r) = -\alpha/r$ ¿Qué encontró? Ayuda: use las relaciones

$$a = -\frac{\alpha}{2E},\ b = \frac{M_z}{\sqrt{-2mE}},\ c = a\epsilon,\ R_{\max} = a(1+\epsilon),\ R_{\min} = a(1-\epsilon). \tag{7.2}$$

Aquí a, b, c, y ϵ son los parámetros típicos de la elipse, $M_z > 0$ es la componente z del momentum angular, y $R_{\max}$ y $R_{\min}$ son respectivamente la distancia al afelio/apogeo y al perihelio/perigeo. Recuerde además que la energía es negativa. (b) Por cierto ¿donde $\dot{r}(r)$ alcanza su máximo valor? Ayuda: recuerde que $b = a\sqrt{1-\epsilon^2}$ y $p = a(1-\epsilon^2)$ (p es también llamado el "semilatus rectum"). (c) Encuentre finalmente a $P(r)$, pero exprese su resultado solo en términos de distancias ¿Cómo es esta función? Ayuda: recuerde la llamada Ley de las Áreas, $\dot{A} = M_z/2m$. Este resultado le permitirá expresar el período en términos de la energía. Finalmente, aquí tiene el resultado:

$$P(r) = \frac{1}{\pi a} \frac{r}{\sqrt{(R_{\max} - r)(r - R_{\min})}}. \tag{7.3}$$