Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

MECÁNICA CLÁSICA (2425)

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicaclasica.html

Tarea 7
Integración de las ecuaciones de movimiento
El problema de dos cuerpos con interacción central
El problema de Kepler

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicaclasica(t7).pdf

1°) El día 10 de Junio de 2003 fue lanzada por la NASA, en un cohete Delta II, la sonda "Spirit". Esta onda exploró el área cercana a su zona de aterrizaje en Marte (el crater Gusev) y buscó evidencia geológica de la presencia de agua en Marte. Suponga usted que las órbitas de la Tierra y Marte están en el mismo plano, la eclíptica. Además, suponga que estos planetas ejecutan un movimiento circular uniforme alrededor del Sol. El radio de la órbita de la Tierra es $a_{\rm T} = 1\,{\rm UA}$, y el radio de la órbita de Marte es $a_{\rm M} = 1,52\,{\rm UA}$ (Dato: $1\,{\rm UA} = 1,495 \times 10^{11}\,{\rm mt}$). Con la suposición de órbitas circulares, la velocidad de la Tierra es $v_{\rm T} = 29,8\,{\rm km/seg}$, y la de Marte es $v_{\rm M} = 24,2\,{\rm km/seg}$. (a) Dibuje dos circunferencias concéntricas que representan las trayectorias de la Tierra y de Marte y trace un sistema de coordenadas $x - y$ con centro en el Sol. Suponga que el día del lanzamiento de "Spirit" la Tierra se encontraba en la posición $-a_{\rm T}(1,0)$. La sonda "Spirit" en su viaje desde la Tierra a Marte recorrió una trayectoria elíptica que era tangencial a la órbita de la Tierra en el lanzamiento, y tangencial a la órbita de Marte en el momento de la llegada. Es decir, esta órbita semi-elíptica tiene un perihelio que se intersecta con la órbita de la Tierra y un afelio que lo hace en la órbita de Marte. Dibuje esa órbita. (b) Encuentre el semi-eje mayor $a_{\rm S}$ de la trayectoria que recorrió la sonda. (c) El tiempo que duró el viaje de la sonda hasta Marte se puede determinar de la tercera Ley de Kepler. En efecto, determine primero el período de la sonda $T_{\rm S}$ y luego el correspondiente a la mitad de una revolución. Según sus cuentas ¿qué día llegó "Spirit" a Marte? Busque un calendario y responda esto. (d) El tiempo que tarda Marte en dar una vuelta al Sol es $T_{\rm M} = 687\,días$. Pues bien, mientras la sonda iba de la Tierra a Marte ¿cuantos grados se ha movido Marte? Compruebe que si Marte se encontraba en la posición $-2^{-1/2}a_{\rm M}(1,1)$ cuando se lanzó la sonda, entonces la sonda y Marte se encontrarán. (e) En realidad, la sonda al escapar de la Tierra (en el perihelio de su órbita) debe tener una velocidad mayor que $v_{\rm T}$. Siendo $(v_{\rm S})_p$ la velocidad de la sonda al escapar de la Tierra, demuestre que

$$(v_{\rm S})_{\rm p} = \sqrt{\frac{GM}{a_{\rm S}}}\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} = \sqrt{\frac{GM}{a_{\rm S}}}\sqrt{\frac{a_{\rm M}}{a_{\rm T}}} \qquad (1.1)$$

¿Por qué es válida esta relación? Ayuda: recuerde que $v_{\rm T} = \sqrt{GM/a_{\rm T}}$. (f) Ahora encuentre la velocidad de la sonda en el afelio de su órbita, $(v_{\rm S})_{\rm a}$ ¿Es esta última mayor o menor que $v_{\rm M}$?

2°) (a) Encuentre expresiones para las velocidades que lleva un planeta en el perihelio y en el afelio. Nota: su resultado debe ser expresado solo en términos de la excentricidad de la órbita, ϵ; la masa del Sol, M; la longitud del semi-eje mayor, a; y la constante de gravitación universal, G. Para resolver esta pregunta, use el teorema de conservación de la energía y del momentum angular. Use también la ecuación de la elipse en coordenadas polares. (b) Encuentre el radio de curvatura R de la trayectoria en el perihelio y en el afelio. Nota: su resultado debe ser expresado solo en términos del llamado "semilatus rectum", p. (c) Encuentre los puntos donde la velocidad radial de un planeta, $\dot{r}$, se anula. Nota: ¡demuéstrelo! (d) ¿A que distancia del origen la velocidad radial es máxima? ¡Debe demostrarlo! Ayuda: la componente z del momentum angular es $M_z = mr^2\dot{\theta}$.

3°) Considere la siguiente energía potencial singular unidimensional: $U(x) = -k/\mid x \mid$, donde k es una constante positiva. Nota: debido a su parecido con su contraparte tridimensional, a esta energía potencial se le ha asignado el nombre, incorrecto por cierto, de "energía potencial para el átomo de hidrógeno unidimensional", o brevemente, energía potencial para el átomo 1H. Ciertamente, el potencial unidimensional $V(x) = 2\pi e \mid x \mid$, más bien que $V(x) = e \mid x \mid^{-1}$, corresponde a una carga positiva en el origen ($e > 0$), la cual genera el campo de fuerzas sobre el electrón $F(x) = -(-e)V'(x) = +2\pi e^2 \mathrm{sgn}(x)$. Aquí $\mathrm{sgn}(x)$ es la llamada función signo ($\mathrm{sgn}(x > 0) = 1$ y $\mathrm{sgn}(x < 0) = -1$). En tres dimensiones, esto es equivalente al campo eléctrico debido al plano $y - z$ con una densidad de carga superficial uniforme $\sigma = e$. Es claro que cualquier potencial físico unidimensional requiere una fuente que es infinita en las direcciones y y z, así que $V(x)$ debe tender realmente a infinito y no a cero cuando $\mid x \mid \to \infty$. Por lo tanto, el problema para el átomo 1H corresponde más bien a un movimiento unidimensional en el campo de Coulomb $U(r) = -e^2 r^{-1}$, que a movimiento bajo un verdadero potencial unidimensional. (a) Demuestre que el campo de fuerzas en nuestro potencial singular es

$$F(x) = -k\frac{\mathrm{sgn}(x)}{x^2} + 2k\frac{\delta(x)}{x}, \tag{3.1}$$

donde $\delta(x)$ es la delta de Dirac. Ayuda: recuerde que $\mathrm{sgn}(x) = x/\mid x \mid$ y su derivada es $\mathrm{sgn}'(x) = 2\delta(x)$. Note que esta fuerza no es puramente atractiva ya que contiene una singularidad repulsiva (que proviene del término que contiene a la delta de Dirac en (3.1)). (b) Considere la siguiente representación para la función signo y la delta de Dirac:

$$\mathrm{sgn}(x) = \lim_{\alpha\to 0} \tanh\left(\frac{x}{a}\right) \ , \quad \delta(x) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{2\alpha} \cosh^{-2}\left(\frac{x}{a}\right). \tag{3.2}$$

Estas dos expresiones están relacionadas por $\mathrm{sgn}'(x) = 2\delta(x)$, o bien por la relación integral

$$\mathrm{sgn}(x) = 2\int_{-\infty}^{x} dx\, \delta(x) - 1 \tag{3.3}$$

¡Compruebe esto! (c) Demuestre que para x pequeño se verifica el siguiente resultado:

$$F(x) = \lim_{\alpha\to 0} -\frac{2k}{3\alpha^3}x. \tag{3.4}$$

Esta fuerza proporciona oscilaciones armónicas alrededor del punto de equilibrio estable, $x = 0$, además, la frecuencia de este movimiento aumenta sin parar a medida que $\alpha \to 0$. De esta forma, el término repulsivo en la expresión de la fuerza hace que esta se anule en $x = 0$ (¡no se incrementa infinitamente!), pero no prohibe la penetración del electrón a través del origen. (d) Para un movimiento finito, la energía E es negativa y escribimos $E = -\mid E \mid$. Demuestre que el movimiento ocurre en el intervalo $\mid x \mid \leq A$, donde la amplitud es $A = k/ \mid E \mid$. (e) Calcule el período del movimiento. Aquí tiene la respuesta:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mA^3}{2k}}. \tag{3.5}$$

(f) Demuestre que la solución del problema en forma paramétrica puede escribirse así:

$$x(\psi) = A \sin^2 \left(\frac{\psi}{2} \right) \operatorname{sgn} \left[\sin \left(\frac{\psi}{2} \right) \right] , \quad t(\psi) = \frac{T}{4\pi} \left[\, \psi - \sin(\psi) \, \right]. \tag{3.6}$$

Note que $t(\psi = 0) = 0$ (la partícula arranca en la posición $x = 0$). Un "viaje redondo" de la partícula corresponde a una variación del ángulo ψ de 0 a 4π. (g) ¿Cómo es la magnitud de la velocidad de la partícula cada vez que ésta pasa por $x = 0$?