Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

MECÁNICA CLÁSICA (2425)

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicaclasica.html

Tarea 8
Integración de las ecuaciones de movimiento
Pequeñas oscilaciones

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicaclasica(t8).pdf

1°) Haga los problemas del quinto capítulo - secciones § 21, § 22 y § 23 - del libro "Mecánica" de Landau y Lifshitz. Le recomiendo leer la sección § 24, y si tiene tiempo, trate de hacer los problemas allí planteados. Vea la bibliografía.

2°) Halle la frecuencia de las pequeñas oscilaciones que realiza una partícula de masa m alrededor de su posición de equilibrio si la energía potencial tiene la forma

$$U(x) = k\left[\left(\frac{x}{a}\right)^3 - 10\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 21\frac{x}{a} + 15\right], \tag{2.1}$$

donde a y k son constantes positivas.

3°) Dos partículas, cada una de masa $m = 1$, están conectadas por un resorte de constante k y por resortes de constante $K = 1$ a dos soportes fijos. Todo el sistema se mantiene en una línea recta. (a) Encuentre las frecuencias y coordenadas normales correspondientes a las pequeñas oscilaciones longitudinales. (b) Escriba la Lagrangiana del sistema pero en las coordenadas normales.

4°) Dos masas iguales de valor $m = 1$, y que pueden deslizarse sin rozamiento sobre un plano, se conectan mediante un resorte de constante $k_2 = 2$. Asimismo, la masa de la izquierda (etiquetada con el número 1) se sujeta a una pared por medio de un resorte de constante $k_1 = 3$. Halle las soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ que están sujetas a las condiciones iniciales $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = 2$, y $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

5°) Encuentre las frecuencias naturales de oscilación de un péndulo doble. Use $m_1 = m_2 = m$ y $l_1 = l_2 = l$. Estas son las frecuencias:

$$\omega_1 = 0,75\sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{y} \quad \omega_1 = 1,86\sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{5.1}$$

6°) Exprese la amplitud y la fase inicial de las oscilaciones en función de los valores iniciales x_0 y v_0 de la coordenada y la velocidad.

7°) Escriba la ecuación de la energía para un oscilador armónico en la forma $u^2 + v^2 = 1$. De esta forma, existe un ángulo ϕ tal que $u = \cos(\phi)$ y $v = \sin(\phi)$. Diferencie la relación que esta igualada a $\sin(\phi)$ con respecto al tiempo, luego divídala por la relación que tiene $\cos(\phi)$. Integre la ecuación diferencial que resulta y escriba finalmente la solución general de la ecuación de movimiento para este problema ¿Qué le pareció este método de resolución? ¿Lo conocía? ¡A veces, hasta los problemas más simples contienen alguna novedad!

8°) (a) Halle las frecuencias normales de oscilación de una cadena formada por tres masas equidistantes iguales y enlazadas mediante resortes idénticos de constante k. Las coordenadas generalizadas son θ_1, θ_2 y θ_3. Suponga que las masas solo pueden moverse sobre guías sin rozamiento. (b) Encuentre las soluciones generales $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ y $\theta_3(t)$. (c) ¿Cómo son los modos normales?

9°) Como usted sabe, la ecuación diferencial para el problema del oscilador armónico simple, de masa m y frecuencia ω, pero sometido a una fuerza externa $F(t)$, tiene la forma

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F(t)}{m} \quad (t \geq 0), \tag{9.1}$$

donde $x(t)$ es posición de la partícula en función del tiempo. Supondremos que las condiciones iniciales (no-homogéneas) para (9.1) son

$$x(t=0) = x_0\,, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)(t=0) = v_0. \tag{9.2}$$

Como es usual, la solución de (9.1) se puede escribir como la suma de una solución particular de (9.1) ($x_{\mathrm{P}}(t)$) más la solución de la ecuación (9.1) con la condición $F(t) = 0$ (la llamada solución general de la ecuación homogénea $x_{\mathrm{H}}(t)$). (a) Escriba a $x_{\mathrm{H}}(t)$. (b) Suponiendo que la función de Green, $G(t,t')$, satisface la misma ecuación inhomogénea (9.1), pero con la fuerza $F(t)$ reemplazada por $\delta(t-t')$ (donde $t' \geq 0$), es decir,

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\right)(t,t') + \omega^2 G(t,t') = \frac{\delta(t-t')}{m}; \tag{9.3}$$

verifique entonces que $x_{\mathrm{P}}(t)$ puede escribirse así:

$$x_{\mathrm{P}}(t) = \int_0^\infty dt'\, G(t,t')F(t'). \tag{9.4}$$

(c) Conocida la solución general de (9.1) ($x(t) = x_{\mathrm{H}}(t) + x_{\mathrm{P}}(t)$), imponga sobre ésta y su primera derivada temporal las condiciones iniciales (9.2). Demuestre que el par de ecuaciones obtenidas por usted se satisfacen al relacionar x_0 y v_0 con las constantes arbitrarias de la solución $x_{\mathrm{H}}(t)$, pero además se tienen ahora condiciones (iniciales) homogéneas para $G(t,t')$ y su derivada parcial respecto de t (en $t=0$ pues). Ayuda: aquí tiene esas dos condiciones homogéneas:

$$G(0,t') = 0\,, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)(0,t') = 0. \tag{9.5}$$

Ahora usted resolverá la ecuación (9.3) siguiendo un procedimiento estándar. (d) Escriba una solución fundamental (o particular) para (9.3) ($G_{\mathrm{P}}(t,t')$) que sea continua en $t = t'$ así como discontinua allí, es decir,

$$G_{\mathrm{P}}(t'+,t') - G_{\mathrm{P}}(t'-,t') = 0, \tag{9.6}$$

$$\left(\frac{\partial G_{\mathrm{P}}}{\partial t}\right)(t'+,t') - \left(\frac{\partial G_{\mathrm{P}}}{\partial t}\right)(t'-,t') = \frac{1}{m}. \tag{9.7}$$

Recuerde que $\lim\limits_{\epsilon \to 0} f(x \pm \epsilon) \equiv f(x\pm)$. Ayuda: la solución $G_{\mathrm{P}}(t,t')$ tiene la forma

$$G_{\mathrm{P}}(t,t') = C \exp\left(i\omega \left| t - t' \right| \right), \tag{9.8}$$

donde C es una constante que usted podría obtener, por ejemplo, imponiendo sobre (9.8) la condición (9.7). (e) Escriba ahora la solución general de (9.3) en la forma

$$G(t,t') = G_{\mathrm{H}}(t,t') + G_{\mathrm{P}}(t,t'), \tag{9.9}$$

donde $G_{\mathrm{H}}(t,t')$ satisface (9.3) con $\delta(t-t') = 0$ (es decir, es la solución general de la ecuación (9.3) pero homogénea). (f) Imponga ahora sobre (9.9) las condiciones (iniciales) homogéneas (9.5) y escriba finalmente a $G(t,t')$. (g) Escriba la solución de (9.3) obtenida en (f) en los casos $t > t'$ y $t < t'$ y trate ahora de obtener una expresión "compacta" para $G(t,t')$ que involucre a la función de Heaviside $\Theta(t-t')$. Es muy fácil ¿ya lo logró? (h) Finalmente, sustituya el último resultado obtenido en (g) en la expresión (9.4) y escriba la función $x(t)$.