Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

MECÁNICA CLÁSICA (2425)

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicaclasica.html

Tarea 9
Cuerpos rígidos

http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/mecanicaclasica(t9).pdf

1°) Haga los problemas del capítulo VI - secciones § 32, y § 38 - del libro "Mecánica" de Landau y Lifshitz. Vea la bibliografía.

2°) Considere una placa delgada (sin espesor) de dimensión $a \times a$. La placa se encuentra colocada en el plano $x - y$ con vértices en $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, a) y $(0, a)$. Tomaremos el origen O en el punto $(0, 0)$. Por ese punto pasa el sistema de coordenadas $x_1 = x$, $x_2 = y$ y $x_3 = z$ (que esta rígidamente ligado a la placa). (a) Encuentre el tensor de inercia con respecto a los ejes x_1, x_2 y x_3. (b) Encuentre los momentos principales de inercia diagonalizando el tensor de inercia que obtuvo en la parte (a). (c) Halle las direcciones de los ejes principales a partir de los autovectores del tensor de inercia de la parte (a).

3°) Considere una esfera homogénea de radio a que rueda sobre un plano bajo la acción de una fuerza exterior $\mathbf{F}$ y de un torque $\mathbf{K}$. Halle las ecuaciones de movimiento. Ayuda: aquí tiene la respuesta

$$\dot{u}_x = \frac{5}{7m}\left(F_x + \frac{K_y}{a}\right),\ \dot{u}_y = \frac{5}{7m}\left(F_y - \frac{K_x}{a}\right),\ \dot{u}_z = 0 \tag{3.1}$$

y

$$\dot{\Omega}_x = -\frac{1}{a}\dot{u}_y,\ \dot{\Omega}_y = \frac{1}{a}\dot{u}_x,\ \dot{\Omega}_z = \frac{5}{2}\frac{K_z}{ma^2}. \tag{3.2}$$

4°) Halle los momentos de inercia I'_{11}, I'_{22}, I'_{33}, de una varilla delgada de longitud l con respecto a los ejes x'_1, x'_2, x'_3, cuyo origen O' esta en un extremo de la varilla. Ayuda: use la relación $I'_{ik} = I_{ik} + M(a^2\delta_{ik} - a_i a_k)$, donde I_{ik} se calcula con respecto a los ejes x_1, x_2, x_3, cuyo origen O se encuentra en el centro de masa de la varilla. Los ejes $x_3 = x'_3$ se ubican a lo largo de la varilla.

5°) Se arroja un cilindro sobre una mesa de modo que resbala con una velocidad $v_0\mathbf{i}$ sin rodar inicialmente (en $t = 0$) ¿En cuanto deberá reducirse su velocidad (comparada con la que tenía inicialmente) para que el cilindro empiece a rodar solamente, sin deslizar? Ayuda: el momento de inercia de un cilindro macizo de masa M y radio a con respecto al eje del cilindro es $I = Ma^2/2$.

6°) Considere un cilindro rígido, homogéneo, de masa m y radio a que descansa sobre una superficie horizontal rígida (plano $x - y$). Supongamos que una fuerza horizontal constante $\mathbf{F} = F\mathbf{i}$ $(F > 0)$ se aplica al cilindro a una altura $h < 2a$ sobre el plano. El cilindro se mueve sobre la superficie en la dirección x debido a esta fuerza. Las condiciones iniciales son $u_x(0) = 0$ y $\Omega_y(0) = 0$. (a) Suponga primeramente que el cilindro rueda sin deslizar. Use las ecuaciones de movimiento y exprese la magnitud de la "fuerza de fricción estática" f versus F, a y h (eliminando $\dot{u}_x$ y $\dot{\Omega}_y$). No olvide el vínculo $\mathbf{u} - a\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{k} = \mathbf{0}$ (la velocidad del punto de contacto es nula). Además, $I = Ma^2/2$. (b) Grafique f en función de h y encuentre el correspondiente rango de valores de h para que f sea negativa, nula o positiva ¡Explique! Ayuda: recuerde que $0 < h < 2a$. Si hizo bien el problema comprobará que el sentido de la fuerza de fricción estática puede ser opuesto o similar al de la fuerza horizontal aplicada $\mathbf{F}$ ¿Usted esperaba ese resultado? (c) Suponga ahora que el cilindro rueda deslizando. En este caso actúa sobre el cilindro una "fuerza de fricción dinámica" (o disipativa) $f\mathbf{i}$, donde f puede ser positiva, nula o negativa. Escriba las ecuaciones de movimiento. Integrándolas y suponiendo que las condiciones iniciales son las mismas de antes, demuestre que se verifica la siguiente relación en cualquier tiempo:

$$\frac{u_x}{a\Omega_y} = \frac{\dot{u}_x}{a\dot{\Omega}_y}. \tag{6.1}$$

Es importante notar que solo cuando esta relación es igual a la unidad, el cilindro rueda sin deslizar y la velocidad del punto de contacto es nula. (d) Exprese la velocidad del punto de contacto $\mathbf{v}$ en términos de u_x y Ω_y, y compruebe que cuando $u_x > a\Omega_y$, entonces $v_x > 0$; y cuando $u_x < a\Omega_y$, entonces $v_x < 0$. (e) Usando la relación obtenida en (c), escriba las desigualdades de la parte (d) pero en términos de $\dot{u}_x$ y $\dot{\Omega}_y$ ¿Cuál es el sentido, en cada caso, de la fuerza de fricción dinámica? (f) Use lo obtenido en (e) para demostrar los siguientes resultados ¡Explíquelos!:

$$v_x > 0 \;\Rightarrow\; 0 > f > \left(\frac{2h}{3a} - 1\right) F \;\Rightarrow\; 0 < h < \frac{3a}{2}, \tag{6.2}$$

$$v_x < 0 \;\Rightarrow\; 0 < f < \left(\frac{2h}{3a} - 1\right) F \;\Rightarrow\; \frac{3a}{2} < h < 2a \tag{6.3}$$

(Como ya sabemos, si $v_x = 0$ el cilindro rueda sin deslizar).

7°) Un cilindro sólido de masa m y radio a rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal y bajo la acción de una fuerza horizontal F aplicada en su centro. La componente I_{zz} del tensor de inercia del cilindro (coincidiendo la dirección z con el eje del cilindro) es $I_{zz} = ma^2/2$. Escriba (sin introducir un multiplicador de Lagrange): (a) La Lagrangiana del sistema. (b) Las ecuaciones de movimiento de Lagrange. (c) La posición del centro de masa del cilindro en función del tiempo ($x = x(t)$).