Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

Métodos Matemáticos de la Física II (2424)
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/metodosmatematicosdos.html`

Examen 1
Funciones generalizadas
Cálculo en la variable compleja
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/metodosmatematicosdos(e1).pdf`

1°) (a) Demuestre la siguiente propiedad de la delta de Dirac: $\delta(ax) = \delta(x)/\,|a|$, donde $a \neq 0$. (b) Calcule $\delta\,[\cos(x)]$ y $\delta\,[\sin(x)]$. (2+4=6 ptos.)

2°) (a) Deduzca la transformada de Fourier de la función signo $\mathrm{sgn}(x)$. Ayuda: use el siguiente resultado

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{k \pm i\epsilon} = \mathrm{P.V.}\left(\frac{1}{k}\right) \mp i\pi\delta(k). \tag{2.1}$$

(b) Repita para la distribución $\mathrm{P.V.}\,(1/x)$. Ayuda: la siguiente integral le será útil:

$$\int_0^{+\infty} dk\, \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(x). \tag{2.2}$$

(3+3=6 ptos.)

3°) Encuentre el módulo de la función

$$F(z) = \frac{z_1 z + z_2}{\bar{z}_2 z + \bar{z}_1}, \tag{3.1}$$

siendo $|z| = 1$ y z_1 y z_2 cualesquiera números complejos (la barra sobre una cantidad corresponde a la operación de conjugación compleja). (4 ptos.)

4°) Como usted sabe, la función compleja $F(z) = \bar{z}$ no es diferenciable en ninguna parte, es decir, el siguiente límite:

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} \equiv \frac{d}{dz}F(z), \tag{4.1}$$

no existe (no es único pues). Ya que usted estudia física, y quiere decir algo más que esto, le lanzo aquí un pequeño reto: demuestre la siguiente igualdad:

$$\frac{d}{dz}(\bar{z}) = \exp(-i2\theta), \tag{4.2}$$

donde $\theta = \arg(dz)$. Ayuda: bueno, $d\bar{z}/dz$ es un número complejo, por lo tanto tiene módulo y tiene argumento, además, ya usted sabe cómo nosotros los físicos tratamos a los "diferenciales" ¿lo demostró ya? (4 ptos.)