Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

Métodos Matemáticos de la Física II (2424)
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/metodosmatematicosdos.html`

Examen 2
Cálculo en la variable compleja
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/metodosmatematicosdos(e2).pdf`

1°) (a) Calcule la siguiente integral:

$$I_1(a>0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\cos(x)}{a^2+x^2}. \tag{1.1}$$

Ayuda: considere la función compleja $F(z) = \exp(iz)/(a^2+z^2)$ y tome como contorno de integración C el eje real $[-R,+R]$ y una semicircunferencia Γ en el semiplano superior ($\Rightarrow C = [-R,+R] \oplus \Gamma$). Finalmente, deje que el radio R de la semicircunferencia tienda a infinito. (b) Evalúe la siguiente integral:

$$I_2(a>0) = \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\cos(x)}{a^2-x^2}. \tag{1.2}$$

Ayuda: considere la función compleja $F(z) = \exp(iz)/(a^2-z^2)$ y tome como contorno de integración C el eje real desde $x=-R$ hasta $x=+R$ pasando por encima de las singularidades del integrando con semicircunferencias Γ_1 y Γ_2, y una semicircunferencia Γ en el semiplano superior. Una vez más, deje que el radio R de la semicircunferencia Γ sea infinitamente grande, y que los radios r_1 y r_2 de las semicircunferencias Γ_1 y Γ_2 tiendan a cero. Nota: ¡justifique todos sus resultados! (3+5=8 ptos.)

2°) Demuestre el siguiente resultado: "Supongamos que $F(z)$ tiene un polo *simple* en el punto $z=a$ con residuo a_{-1} y sea C un arco de la circunferencia $|z-a|=\epsilon$ que subtiende un ángulo central de valor ϕ. Entonces

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_C dz\, F(z) = i\phi\, a_{-1}\text{''}. \tag{2.1}$$

Ayuda: como el polo es simple, $F(z) = G(z) + a_{-1}(z-a)^{-1}$, siendo $G(z)$ una función analítica en un entorno de $z=a$. (4 ptos.)

3°) Calcule la integral

$$I(n) = \oint_C dz\, \frac{\exp(z)}{(z-1)^n}, \tag{3.1}$$

donde C es la circunferencia $|z|=2$ (recorrida en sentido positivo) y $n \geq 1$. (4 ptos.)

4°) Sea C la circunferencia $|z|=1$ recorrida en sentido positivo. Encuentre la siguiente integral:

$$I = \oint_C dz\, \exp(z+z^{-1}). \tag{4.1}$$

(4 ptos.)