Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

Métodos Matemáticos de la Física II (2424)
http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/metodosmatematicosdos.html

Examen 3
Ecuaciones diferenciales ordinarias
Funciones especiales
Problemas de Sturm-Liouville
http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/metodosmatematicosdos(e3).pdf

1°) Como usted sabe, si $u_1(x)$ es una solución de la EDO $u''(x) + P(x)u'(x) + Q(x)u(x) = 0$, entonces

$$u_2(x) = u_1(x) \int^x dy \, \frac{\exp\left[-\int^y d\bar{y}\, P(\bar{y})\right]}{[u_1(y)]^2} \tag{1.1}$$

es también una solución. Así que, la solución general de la EDO es $u(x) = A\, u_1(x) + B\, u_2(x)$, con A y B constantes arbitararias. Considere ahora la ecuación de Bessel:

$$x^2 u''(x) + x u'(x) + (x^2 - \nu^2) u(x) = 0. \tag{1.2}$$

Una solución de esta ecuación, para todo ν, es la llamada función de Bessel de primera clase,

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \tag{1.3}$$

(a) A partir de $J_0(x)$ encuentre una segunda solución de la ecuación de Bessel. Ayuda: use la fórmula $\Gamma(n+1) = n!$. (b) Como es de su conocimiento, una segunda solución de esta ecuación es precisamente la función de Neumann de orden cero

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right] J_0(x) + \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \cdots\right], \tag{1.4}$$

donde $\gamma \approx 0,57721$. Reconcilie este resultado con el obtenido por usted en la parte (a). (4+2=6 ptos.)

2°) (a) Encuentre la solución de las ecuaciones de Legendre, Laguerre y Hermite en el caso $\lambda = 0$. Escriba cada solución *hasta donde pueda*. Ayuda: aquí tiene las ecuaciones:

$$(1 - x^2)u''(x) - 2xu'(x) + \lambda u(x) = 0, \tag{2.1}$$

$$xu''(x) + (1 - x)u'(x) + \lambda u(x) = 0, \tag{2.2}$$

$$u''(x) - 2xu'(x) + \lambda u(x) = 0. \tag{2.3}$$

La ecuación (2.1) es la de Legendre, la (2.2) es la de Laguerre y la (2.3) es la de Hermite. Otra ayuda: multiplique la ecuación (2.2) por $\exp(-x)$ y la (2.3) por $\exp(-x^2)$, de esta manera las escribirá fácilmente en la forma auto-adjunta. Nota: soluciones de estas ecuaciones con $\lambda = 0$ ya han sido obtenidas por usted, en efecto, el polinomio de Legendre $P_{n=0}(x) = 1$, donde $x \in [-1, +1]$, es solución

de (2.1), siendo $\lambda = n(n+1)$. El polinomio de Laguerre $L_{n=0}(x) = 1$, donde $x \in [0, +\infty)$, es solución de (2.2), siendo $\lambda = n$. Asimismo, el polinomio de Hermite $H_{n=0}(x) = 1$, donde $x \in (-\infty, +\infty)$, es solución de (2.3), siendo $\lambda = n$. Ayuda final: la siguiente integral le será útil al resolver (2.1):

$$\int dx \, \frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| . \tag{2.4}$$

(b) ¿Qué característica especial presentan sus soluciones que no poseen las polinómicas dadas aquí arriba? ¡Justifique su respuesta! (3+3=6 ptos.)

3°) (a) Encuentre las autofunciones complejas y los autovalores del siguiente problema de Sturm-Liouville:

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0 \, , \quad 0 \leq x \leq \pi \, , \quad u(0) = u(\pi), \quad u'(0) = u'(\pi) \tag{3.1}$$

¡Justifique detalladamente cada uno de sus resultados! (5 ptos.)

4°) (a) Considere la EDO de Legendre (2.1) con $n = 1$ ($\lambda = n(n+1)$). Suponga que existe al menos una solución en serie para esta ecuación que tiene la forma

$$u(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \, , \tag{4.1}$$

donde $x \in [-1, +1]$. Sustituya la serie (4.1) en (2.1) y encuentre su solución general. (b) Evalúe en $x = \pm 1$ cada una de las soluciones independientes que encontró en la pregunta anterior ¿Qué puede concluir? ¡Justifique su respuesta! Ayuda: el siguiente resultado le podría ser de utilidad:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} = \infty . \tag{4.2}$$

(4+1=5 ptos.)