Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

Métodos Matemáticos de la Física II (2424)
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/metodosmatematicosdos.html`

Examen 4
Ecuaciones diferenciales ordinarias
Funciones de Green
Ecuaciones diferenciales parciales
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/metodosmatematicosdos(e4).pdf`

1°) Encuentre la función de Green para el siguiente problema: $\partial_{xx}g(x,y) - k^2 g(x,y) = -\delta(x-y)$, donde x y y pertenecen al intervalo $[0,\pi]$ con las condición de frontera de Dirichlet $g(x=0,y) = g(x=\pi,y) = 0$. Note que la EDO para $g(x,y)$ no es la EDO para el oscilador armónico. Nota: específicamente, encuentre la función de Green en los intervalos $0 \leq x \leq y$, y $y \leq x \leq \pi$. (5 ptos.)

2°) Considere el siguiente problema estacionario sobre un cuarto del plano $x-y$:

$$\nabla^2 u = 0, \quad 0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty, \tag{2.1}$$

con las condiciones de frontera: (i) $u(0,y) = 1$, (ii) $u(x,0) = 0$, (iii) $u(x,y)$ esta acotado. El siguiente resultado le podría ayudar al escribir la solución del problema:

$$\int_0^\infty d\alpha \, \frac{\sin(b\alpha)}{\alpha} = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(b). \tag{2.2}$$

(4 ptos.)

3°) Encuentre la solución de la siguiente EDP:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad t \geq 0, \tag{3.1}$$

que esta sujeta a las siguientes condiciones:

$$u'(0,y,t) = u'(a,y,t) = 0, \quad u'(x,0,t) = u'(x,b,t) = 0, \quad u(x,y,0) = f(x,y). \tag{3.2}$$

(5 ptos.)

4°) Como usted sabe de su curso de Mecánica Clásica (o sabrá, si no lo ha visto aun), la EDP de Hamilton-Jacobi (dependiente de una sola variable espacial y del tiempo) tiene la forma

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V(x) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \tag{4.1}$$

donde $S = S(x,t)$ es la acción y $V(x)$ es la energía potencial de la masa m. Estudiemos el problema de una partícula que se desliza hacia abajo sin rozamiento sobre un plano inclinado fijo de ángulo θ. La coordenada x mide la posición de la masa sobre el plano inclinado desde su parte más alta; en este

caso el potencial gravitacional $V(x)$ tiene la forma (suponiendo que es nulo justamente en la parte más alta) $V(x) = -mgx\sin(\theta)$. (a) Suponga que la solución de (4.1) puede escribirse así

$$S(x,t) = S_1(x) + S_2(t). \tag{4.2}$$

Sustituya (4.2) en la ecuación de Hamilton-Jacobi y escriba las dos ecuaciones diferenciales ordinarias que resultan (llame α a la constante que surge de aplicar el método de separación de variables). (b) Resuelva cada una de estas ecuaciones y sustituya sus resultados en (4.2) para obtener la acción $S(x,t)$. Note que la acción, en este caso, solo depende de dos constantes arbitrarias (una de esas constantes es precisamente α, y la otra la puede añadir a $S(x,t)$). (c) Según el procedimiento estándar, para obtener a partir de $S(x,t)$ la solución de la ecuación de movimiento $x(t)$, la siguiente cantidad también debe ser una constante:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \beta = \text{const.} \tag{4.3}$$

Escriba la relación (4.3) (derivando $S(x,t)$ respecto de α e igualando esta cantidad a β) y encuentre x en función del tiempo t ($x(t)$). Ayuda: le conviene escribir a $x(t)$ en términos de $x(0)$ y $\dot{x}(0)$ ¿obtuvo lo que esperaba? (1+2+4=7 ptos.)