Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

Métodos Matemáticos de la Física II (2424)
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/metodosmatematicosdos.html`

Examen de Reparación
Funciones generalizadas
Ecuaciones diferenciales ordinarias
Problemas de Sturm-Liouville
Ecuaciones diferenciales parciales
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/metodosmatematicosdos(er).pdf`

1°) (a) Sea $\psi = \psi(x)$ una función sobre la cual actúa $\hat{p}^{-1}$, donde $\hat{p} = -i\hbar\, d/dx$ es el operador momentum. Sea $\phi = \phi(x)$ el resultado de esta operación:

$$\phi(x) = \hat{p}^{-1}\psi(x). \tag{1.1}$$

¡Encuentre $\phi(x)$ para una función $\psi(x)$ dada e identifique al operador $\hat{p}^{-1}$! (b) Demuestre explícitamente que la acción del operador $\hat{p}$ sobre la función $\phi(x)$ nos da la función $\psi(x)$. (4+1=5 ptos.)

2°) Considere la siguiente EDO:

$$\phi''(x) + 2\phi'(x) + \lambda\phi(x) = 0, \quad x \in [0,1], \quad \phi(0) = \phi(1) = 0. \tag{2.1}$$

(a) Escriba la ecuación (2.1) en la forma auto-adjunta. Identifique el operador auto-adjunto $\hat{L}$ y el peso $w(x)$. (b) Encuentre las autofunciones ortonormales respecto a la función peso y los autovalores ¡Justifique sus respuestas! (1+4=5 ptos.)

3°) (a) Encuentre las autofunciones normalizadas complejas y los autovalores del siguiente problema de Sturm-Liouville:

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0\,, \quad -\pi \le x \le \pi\,, \quad u(-\pi) = -u(\pi), \quad u'(-\pi) = -u'(\pi) \tag{3.1}$$

¡Justifique detalladamente cada uno de sus resultados! (5 ptos.)

4°) Encuentre la solución de la siguiente EDP:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b, \quad t \ge 0, \tag{4.1}$$

que esta sujeta a las siguientes condiciones:

$$u'(0,y,t) = u'(a,y,t) = 0, \quad u'(x,0,t) = u'(x,b,t) = 0, \quad u(x,y,0) = f(x,y). \tag{4.2}$$

Nota: usted deberá expresar la solución en términos solo de a, b y $f(x,y)$ ¡Justifique todos sus resultados! (5 ptos.)