Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

Métodos Matemáticos de la Física II (2424)
http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/metodosmatematicosdos.html

Tarea 0
Preliminares
http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/metodosmatematicosdos(t0).pdf

1°) Consideremos ecuaciones diferenciales lineales de orden n-ésimo que tienen la forma $a_0(x)u^{(n)}(x)+a_1(x)u^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n(x)u(x)=f(x)$, donde $u^{(r)}(x)$ denota la derivada r-ésima de $u(x)$. Llamaremos $\hat{D}$ al operador diferenciación y $\hat{L}\equiv a_0(x)\hat{D}^n+a_1(x)\hat{D}^{n-1}+\ldots+a_n(x)$, donde las $a_i(x)$ $(i=0,1,\ldots,n)$ son funciones suaves. Con estas definiciones nuestra ecuación lineal puede escribirse así:

$$\hat{L}u(x)=f(x). \tag{1.1}$$

Se debe insistir en que los coeficientes $a_i(x)$ sean suaves para que el producto de la "distribución" $\hat{D}^i u(x)$ y la función $a_i(x)$ esté bien definido (vea la Def. 1.1 al final del problema). Nota: de todas formas, si uno usa una especie de regla de multiplicación extendida entonces si podría tratar con ecuaciones que tienen coeficientes no-suaves (vea la [Ref. 1.1] al final del problema).

Si se considera que (1.1) es una ecuación diferencial para la función generalizada $u(x)$, entonces existen diversos tipos de soluciones de esa ecuación. Estas soluciones se clasifican de la siguiente manera:

Definición 1.2:

(i) Cualquier distribución que satisface la ecuación (1.1) es llamada una **solución generalizada**.

(ii) Una **solución clásica** de (1.1) es una función ordinaria la cual es diferenciable n veces y la satisface (y por lo tanto, genera una distribución regular la cual satisface (1.1) en el sentido generalizado).

(iii) Una **solución débil** es una función ordinaria la cual podría no ser n veces diferenciable, y por lo tanto no es una solución clásica, sin embargo, ésta genera una distribución regular que es una solución generalizada.

(iv) Una **solución distribucional** es una distribución singular que satisface (1.1).

Se puede mencionar que toda solución es, o bien clásica, o debil, o distribucional; además, si la función $f(x)$ en (1.1) es una distribución singular, entonces todas las soluciones deben ser distribucionales o débiles. El asunto más destacable es que, admitiendo a las funciones generalizadas, estas pueden conducir a nuevas soluciones de ecuaciones que son incluso enteramente clásicas, es decir, ecuaciones que no contienen distribuciones singulares.

(a) Demuestre que la ecuación $xu'(x)=0$ tiene la solución clásica $u(x)=\mathrm{const}$. Sin embargo, $u(x)=c_1\Theta(x)+c_2$, donde $\Theta(x)$ es la función de Heaviside, es una solución débil para las constantes (arbitrarias) c_1 y c_2. Nota: si lo ha demostrado, entonces podrá concluir que se pueden tener soluciones no-clásicas las cuales no cumplen la "regla" que una ecuación de primer orden tiene una solución general con una sola constante arbitraria. Este fenómeno es bien conocido en la teoría clásica de ecuaciones diferenciales y esa solución débil no es realmente algo nuevo. Sin embargo, tenemos derecho a considerarla una solución generalizada propia de nuestra ecuación, aunque clasicamente no es diferenciable y por lo tanto no es una solución clásica, los matemáticos clásicos deben hacer algunas contorsiones para discutir este tipo de soluciones.

(b) Demuestre que la ecuación $x^2u'(x)=0$ tiene la misma solución clásica y la misma solución débil que la ecuación $xu'(x)=0$, pero también se tiene la solución distribucional $u(x)=c_1\delta(x)+c_2\Theta(x)+c_3$,

para cualesquiera constantes c_1, c_2 y c_3. Este tipo de soluciones no tienen análogo en la teoría clásica.

Nota final: es algo sorprendente que algunas ecuaciones diferenciales que son perfectamente convencionales puedan adquirir nuevas soluciones, y algunas de estas son singulares cuando se permiten funciones generalizadas. Es natural preguntarse si tales nuevas soluciones distribucionales existen para todas las ecuaciones diferenciales (si la respuesta es sí, nos quedaría la desagradable sensación que entonces tendríamos que rehacer completamente la teoría de ecuaciones diferenciales lineales). Afortunadamente, la respuesta es no. En efecto, las soluciones distribucionales de las ecuaciones diferenciales clásicas sólo surgen cuando el coeficiente "lider", $a_0(x)$, se anula, y las soluciones tienen singularidades en los ceros de $a_0(x)$. La teoría elemental de ecuaciones lineales, y la mayoría de sus aplicaciones, tienen que ver con ecuaciones cuyos respectivos coeficientes $a_0(x)$ no se anulan, lo que asegura que las únicas soluciones son las clásicas. En este caso, la teoría de distribuciones no añade nada nuevo.

Anexo: Definición 1.1: Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se dice que es n veces continuamente diferenciable si sus primeras n derivadas existen y son continuas. La función f se dice que es suave o infinitamente diferenciable si sus derivadas de todos los órdenes existen y son continuas.

[Referencia 1.1] D. H. Griffel, Applied Functional Analysis (Dover, New York, 2002), p. 39 (El texto de este problema fue tomado, en buena parte, de esta excelente referencia).

2°) Como usted sabe, la gravedad es la fuerza dominante a gran escala, pero además, es una fuerza que afecta a toda partícula de la misma manera. Esta universalidad fue primero reconocida por Galileo Galilei, quien encontró que dos cuerpos cualesquiera caen con la misma velocidad. También se ha observado que la luz es deflectada por un campo gravitacional. Esta propiedad de la gravedad lleva a diversos problemas; por ejemplo, si una cantidad suficientemente grande de materia estuviera concentrada en alguna región, la luz que sale de allí podría terminar siendo arrastrada hacia el interior de esa misma región. Sorprendentemente, algo de esto fue notado por Laplace en 1798 al señalar que un cuerpo con aproximadamente la misma densidad de la Tierra pero con 250 veces el radio del Sol, podría impedir, por su gran poder de atracción, que sus rayos de luz nos alcancen. Como consecuencia de esto ¡los cuerpos más grandes en el universo podrían permanecer invisibles para nosotros! [Wow!] ¿Será verdad lo dicho por Laplace? Ayuda [tratamiento no-relativista]: el cuerpo tiene masa M (radio R) y atrae a un objeto (el rayo de luz) que tiene masa m. Como usted sabe, la ecuación de movimiento no depende de m. Al integrar esta ecuación se obtiene la siguiente relación:

$$v^2 = c^2 + 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right), \tag{2.1}$$

donde v es la velocidad del rayo de luz que trata de escapar del cuerpo masivo, c es la velocidad de la luz (o la velocidad del rayo de luz sobre la superficie del Sol), $G = 6,67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2$ es la constante de gravitación universal y r es la distancia que separa a m del centro del cuerpo masivo. Si suponemos que a una distancia $r \gg R$ el rayo de luz se detiene ($v = 0$), entonces se puede escribir la siguiente fórmula:

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \tag{2.2}$$

Ahora use la bien conocida expresión para la densidad (uniforme) del cuerpo masivo

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}, \tag{2.3}$$

y obtenga la siguiente expresión:

$$c = \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\sqrt{\rho G}R. \tag{2.4}$$

Pues bien, si lo que se mencionó antes es verdad, entonces, cuando $R = 250\,R_\odot$, donde $R_\odot = 6,96 \times 10^8\,\mathrm{m}$ es el radio del Sol y $\rho = \rho_\oplus = 5{,}515\,\mathrm{kg/m^3}$ es la densidad de la Tierra, se debería obtener de (2.4) un valor muy cercano a la velocidad de la luz en el vacio $c \simeq 3 \times 10^8\,\mathrm{m/seg}$. En conclusión ¿será cierto que

$$c = \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\sqrt{\rho_\oplus G}\,250\,R_\odot? \tag{2.5}$$

Nota: si le interesó el problema, puede consultar las páginas 2 y 365 del libro "The Large Scale Structure of Space-Time" por S. W. Hawking y G. F. R. Ellis (Cambridge University Press, 1994). Allí se presenta un camino ligeramente diferente del que aquí usamos para derivar el resultado (2.5).

3°) Imagine que usted se encuentra en la azotea de una torre de altura h sobre la superficie de la Tierra. Demuestre que la distancia que usted puede ver a lo largo de la superficie de la Tierra es aproximadamente $s = \sqrt{2hR}$, donde R es el radio de la Tierra. Ayuda: demuestre que $h/R = \sec(\theta) - 1$ (donde $\theta = s/R$) y encuentre dos términos de la serie para $\sec(\theta) = 1/\cos(\theta)$. Muestre también que la distancia s en millas es aproximadamente $s = \sqrt{3h/2}$, con h en pies. [El texto de este problema fue tomado de la excelente referencia: M. L. Boas, Mathematical Methods in the Physical Sciences, 2nd ed (John Wiley & Sons, New York, 1983), p. 41.]

4°) La teoría general de ecuaciones diferenciales lineales sugiere dos métodos que pueden usarse para resolver la ecuación

$$(\hat{L}u)(x) = f(x), \tag{4.1}$$

donde $\hat{L}$ es un operador diferencial lineal ordinario, $f(x)$ es una función conocida y $u(x)$ la función desconocida. Un método es encontrar la representación espectral de $\hat{L}$ estudiando las soluciones de la ecuación

$$(\hat{L}u)(x) = \lambda u(x), \tag{4.2}$$

donde λ es una constante arbitraria. El otro método es encontrar el operador inverso de $\hat{L}$, es decir, encontrar un operador $\hat{L}^{-1}$ tal que el producto $\hat{L}^{-1}\hat{L}$ es el operador identidad. A continuación mostraremos que el inverso de un operador diferencial es un operador integral. El núcleo de este operador integral es precisamente la llamada función de Green del operador diferencial.

Sea $\hat{L}$ un operador diferencial lineal que actúa sobre un espacio de funciones $u(x)$. El operador inverso de $\hat{L}$ es el operador $\hat{L}^{-1}$ tal que $\hat{L}^{-1}\hat{L} = \hat{L}\hat{L}^{-1} = \mathbf{1}$, donde $\mathbf{1}$ es el operador identidad. Supongamos que $\hat{L}^{-1}$ es un operador integral con núcleo $g(x,t)$ tal que

$$(\hat{L}^{-1}u)(x) = \int dt\, g(x,t)\, u(t), \tag{4.3}$$

entonces, usando manipulaciones formales (no necesariamente rigurosas), encontramos que

$$u(x) = (\mathbf{1}u)(x) = (\hat{L}\hat{L}^{-1}u)(x) = \hat{L}\int dt\, g(x,t)\, u(t) = \int dt\, (\hat{L}g)(x,t)\, u(t).$$

Observe el núcleo $(\hat{L}g)(x,t)$: ya que $\hat{L}$ es un operador que deriva respecto de x, parece que podemos escribir

$$(\hat{L}g)(x,t) = \delta(x-t), \tag{4.4}$$

donde $\delta(x)$ es la delta de Dirac. (a) Considere el operador

$$\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2}. \tag{4.5}$$

La función de Green de $\hat{L}$ debe satisfacer la ecuación (4.4). Resuelva esta ecuación por integración directa y escriba la función de Green más general para $\hat{L}$. Ayuda: aquí tiene la respuesta

$$g(x,t) = (x-t)\Theta(x-t) + xa(t) + b(t), \tag{4.6}$$

donde $a(t)$ y $b(t)$ son funciones arbitrarias y $\Theta(x)$ es la función de Heaviside. Note que la función $u(x) = \int dt\, g(x,t)\, f(t)$, siendo $f(t)$ cualquier función integrable que se anula fuera de un intervalo finito, satisface automáticamente la ecuación diferencial (4.1). (b) Encuentre la solución $u(x)$ de (4.1) que satisface la condición de frontera de Dirichlet $u(0) = u(1) = 0$. Ayuda: escriba la solución general así:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, g(x,t)\, f(t) = \int_{-\infty}^{x} dt\, (x-t)\, f(t) + x \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, a(t)\, f(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, b(t)\, f(t),$$

donde se usó la relación (4.6). Ahora imponga sobre $u(x)$ la condición de frontera. Aquí tiene la respuesta a la pregunta:

$$u(x) = \int_{0}^{x} dt\, (x-t)\, f(t) - x \int_{0}^{1} dt\, (1-t)\, f(t). \tag{4.7}$$

(c) Identifique el núcleo del operador $\hat{L}$ y verifique que éste también satisface la condición de frontera de Dirichlet $g(0,t) = g(1,t) = 0$. Ayuda: aquí tiene a $g(x,t)$:

$$g(x,t) = (x-t)\Theta(x-t) - x(1-t), \quad 0 \le x, \quad t \le 1. \tag{4.8}$$

Si le interesó el problema, le recomiendo consultar la referencia: B. Friedman, Principles and Techniques of Applied Mathematics (Dover, New York, 1990), p. 144.

5°) Recientemente, el joven de origen indio Shouryya Ray de 16 años de edad, obtuvo el segundo lugar en una competición para jovenes investigadores de secundaria en la sección de matemáticas e informática, en Alemania. Al informar de esta noticia, algunos periodicos de todo el mundo mencionaron que Ray había resuelto un problema que fue propuesto por Newton hace más de 300 años. Con el pasar de los días se ha sabido que en el pasado otros investigadores estudiaron el mismo problema y dieron con su solución (aunque no exactamente como la planteó Ray). Se trata del problema del movimiento de un proyectil sometido a la gravedad y a una resistencia (por ejemplo, del aire) que es cuadrática en la rapidez. La intención de este problema es que usted repita los cálculos hechos por Ray y se divierta con el bonito procedimiento. La ecuación de movimiento para este problema es

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R}, \tag{5.1}$$

donde $g = -g\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ es la gravedad, $\boldsymbol{R} = -R\cos(\theta)\hat{\boldsymbol{\imath}} - R\sin(\theta)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ es la resistencia (siendo θ el ángulo que forma la recta tangente a la trayectoria (en cualquier punto) con respecto al eje x), y $\boldsymbol{V} = d\boldsymbol{r}/dt = u\hat{\boldsymbol{\imath}} + v\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ es el vector velocidad (Hemos usado aquí la misma notación que usó Ray, es decir, $u = u(t)$ es la componente x de la velocidad y $v = v(t)$ es la componente y de la velocidad). Las condiciones iniciales son $u(0) \equiv u_0 > 0$ y $v(0) \equiv v_0 > 0$ (por ejemplo). Además, supondremos que la resistencia es proporcional a V^2, es decir, $R = \alpha V^2 = \alpha(u^2 + v^2)$ (siendo α una constante de proporcionalidad). (a) Demuestre que u y v satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{du}{dt} + \alpha u\sqrt{u^2+v^2} = 0\,, \qquad \frac{dv}{dt} + \alpha v\sqrt{u^2+v^2} = -g. \tag{5.2}$$

(b) Considere el siguiente cambio (que ha sido usado, por cierto, desde principios del siglo XVIII):

$$\psi \equiv \frac{v}{u}. \tag{5.3}$$

Demuestre ahora que, de (5.3) y (5.2), se obtiene el resultado

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{g}{u}. \tag{5.4}$$

(c) Use ahora la primera de las ecuaciones en (5.2), y la relación que sale de diferenciar (5.4), para encontrar la siguiente ecuación diferencial (no-lineal) para ψ:

$$\frac{d^2\psi}{dt} + \alpha g\sqrt{1+\psi^2} = 0. \tag{5.5}$$

(d) Integre (5.5) una vez (haciendo una cuadratura) y obtenga la ecuación

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \alpha g \int^{\psi} dy\sqrt{1+y^2} = \text{const}. \tag{5.6}$$

Use ahora la siguiente integral indefinida

$$\int dx\,\sqrt{1+x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\sinh^{-1}(x), \tag{5.7}$$

y los resultados (5.3) y (5.4) para obtener a partir de (5.6) el resultado que precisamente obtuvo Ray, es decir,

$$\frac{1}{2}\frac{g^2}{u^2} + \frac{\alpha g}{2}\left[\frac{v}{u^2}\sqrt{u^2+v^2} + \sinh^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)\right] = \text{const}. \tag{5.8}$$

Nota: en realidad el lado izquierdo de la expresión dada en (5.8) es una de las constantes de movimiento para este problema, que además es función unicamente de las componentes x y y de la velocidad.

6°) Considere la ecuación de Schrödinger unidimensional con un potencial delta atractivo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) - g\delta(x)\psi(x) = E\psi(x). \tag{6.1}$$

La delta de Dirac puede representarse como la derivada segunda de la función valor absoluto

$$\delta(x) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left|x\right|. \tag{6.2}$$

Sustituya esta expresión en (6.1) y divida la ecuación resultante por $\psi(x)$, además use el hecho que para estados ligados la energía es negativa ($E = -\left|E\right|$). (a) A continuación demuestre la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\psi}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\psi}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\psi}\frac{d\psi}{dx}\right) + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2,$$

ahora úsela para eliminar el término que tiene la derivada segunda de $\psi(x)$ en la ecuación que obtuvo

antes. Ayuda: Aquí tiene el resultado

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\psi}\frac{d\psi}{dx}+\frac{mg}{\hbar^2}\frac{d\,|x|}{dx}\right)+\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2=\frac{2m\,|E|}{\hbar^2}. \tag{6.3}$$

(b) Anule el término que está más a la izquierda en (6.3) y resuelva esa ecuación diferencial. Escriba la autofunción para el estado ligado $\psi(x)$ y luego normalícela. (c) Regrese a lo que quedó de (6.3) y sustituya allí a la solución que obtuvo en (b). Ahora puede despejar la energía correspondiente al estado base ¿Que le pareció este método? Si le interesó el problema, le recomiendo consultar la referencia: P. Bruskiewich, "A novel look at the one dimensional delta Schrödinger equation," Gamma. **138**, 22 (2005).

7°) En 1735 Euler (inesperadamente) encontró la siguiente elegante fórmula:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}. \tag{7.1}$$

En ese tiempo, ya se sabía que la suma de la izquierda tendía al número $1{,}64493406684822643647\ldots$ (resultado que él mismo había demostrado en 1735), sin embargo, no se sabía que ese número era $\pi^2/6$. La demostración del resultado (7.1) al parecer incrementó todavía más la reputación de Euler. Esta demostración es tan mágica que merece presentarse aquí (se sabe que posteriormente Euler propuso incluso una demostración diferente de este resultado para responder a sus críticos).

Arranque con la expansión en serie de Taylor estándar para la función $\sin(x)$:

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots, \tag{7.2}$$

la cual converge para todo x. Euler interpretó el lado izquierdo como un polinomio de grado infinito. Ya que es un polinomio, puede escribirse como un producto de factores y ya que las raíces son 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, ..., el polinomio se puede escribir como

$$x(x^2-\pi^2)(x^2-4\pi^2)(x^2-9\pi^2)\ldots,$$

y este puede reescribirse así

$$Ax\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots. \tag{7.3}$$

Ya que

$$\frac{\sin(x)}{x}\to 1 \quad \text{cuando } x\to 0,$$

se tiene que $A=1$. Así que

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots. \tag{7.4}$$

Ahora Euler iguala los coeficientes de x^3 a ambos lados de (7.4) y obtiene

$$-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{2^2\pi^2}-\frac{1}{3^2\pi^2}-\frac{1}{4^2\pi^2}-\cdots$$

o

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

y el resultado aparece de la nada ¡Ahora le toca a usted repetir el mágico procedimiento de Euler! [El texto de este problema fue tomado, en buena parte, de la excelente referencia: J. Havil, Gamma: Exploring Euler's Constant (Princeton University Press, New Jersey, 2003), p. 39.]