Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

Métodos Matemáticos de la Física II (2424)
http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/metodosmatematicosdos.html

Tarea 3
Funciones generalizadas
Álgebra y cálculo en la variable compleja
http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/metodosmatematicosdos(t3).pdf

1°) **Más sobre una fórmula de Sokhotskii:** sea la función logaritmo (analítica) $F(z) = \log(z) = \log(x+iy) = \log(|z|) + i\mathrm{Arg}(z)$, donde $|z| = \sqrt{x^2+y^2} > 0$ y $\mathrm{Arg}(z) = \tan^{-1}(y/x)$, pero restringida a los valores $-\pi < \mathrm{Arg}(z) < +\pi$. (a) Demuestre la siguiente expresión:

$$\lim_{x\to 0} \log(x+iy) = \log(|y|) - i\frac{\pi}{2} + i\pi\Theta(y), \tag{1.1}$$

donde $\Theta(y)$ es la función de Heaviside. (b) Demuestre ahora que la derivada de la fórmula (1.1) con respecto a la variable y nos da el resultado:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{y-ix} \equiv \frac{1}{y-i0} = \mathrm{P.V.}\left(\frac{1}{y}\right) + i\pi\delta(y), \tag{1.2}$$

donde, como es usual, $\mathrm{P.V.}$ representa el valor principal y $\delta(y)$ es la delta de Dirac. Ayuda: use sin temor el hecho que (en la teoría de funciones generalizadas) la derivada de un límite es el límite de la derivada. (c) Tome el complejo conjugado de la fórmula (1.2) y junto con (1.2) escriba finalmente una de las fórmulas de Sokhotskii:

$$\frac{1}{y\pm i0} = \mathrm{P.V.}\left(\frac{1}{y}\right) \mp i\pi\delta(y). \tag{1.3}$$

Nota: esta fórmula la demostramos en clase siguiendo un procedimiento bastante diferente al seguido aquí. (d) A partir de (1.3), y usando una conocida representación para la función delta de Dirac, demuestre la siguiente fórmula:

$$\frac{1}{y-i0} - \frac{1}{y+i0} = 2\pi i\delta(y) = \lim_{x\to 0} \frac{2ix}{x^2+y^2}. \tag{1.4}$$

2°) **Comportamiento de la función de onda cerca del origen en el caso radial:** en este ejercicio deseamos probar que la solución radial de la ecuación de Schrödinger (en tres dimensiones) para momentum angular $l = 0$,

$$R(r) \equiv \frac{1}{r}u(r), \tag{2.1}$$

no puede comportarse como $1/r$ en el origen (esta es la llamada solución irregular). (a) Tome la función

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}} \tag{2.2}$$

y calcule $\nabla^2 f$, es decir,

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rf) = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr} \equiv -g. \tag{2.3}$$

Demuestre que en el límite $a \to 0$, g tiende a $4\pi\delta^3(\boldsymbol{r})$. Es decir, demuestre que: (*i*) para $r = 0$, $g \to \infty$ para $a \to 0$, (*ii*) para cualquier $r > 0$, $g \to 0$ para $a \to 0$,

$$(iii)\ \int d^3(\boldsymbol{r}) g(r) = 4\pi \int_0^\infty dr\, \frac{3a^2 r^2}{(r^2+a^2)^{5/2}} = 4\pi. \tag{2.4}$$

Por lo tanto, para $a \to 0$, $g \to 4\pi\delta^3(\boldsymbol{r})$ y se tiene que $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{r})$. (b) ¿Cómo es todo esto en dos dimensiones? Pues bien, en este caso la llamada solución irregular se comporta como $\ln(r)$. Usamos

$$f(r) = \ln\left(\sqrt{r^2+a^2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(r^2+a^2\right), \tag{2.5}$$

por lo tanto

$$\nabla^2 f = \frac{1}{2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{d}{dr}\ln\left(r^2+a^2\right) = \frac{2a^2}{(r^2+a^2)^2} \equiv g. \tag{2.6}$$

Probemos ahora que g es proporcional a la delta de Dirac en el límite $a \to 0$: (*i*) de nuevo $g \to \infty$ para $r = 0$ con $a \to 0$. (*ii*) $g \to 0$ para $r > 0$ con $a \to 0$,

$$(iii)\ \int d^2(\boldsymbol{r}) g(r) = 2\pi \int_0^\infty dr\, \frac{2a^2 r}{(r^2+a^2)^2} = 2\pi. \tag{2.7}$$

Por lo tanto, $g \to 2\pi\delta^2(\boldsymbol{r})$ para $a \to 0$.

3°) **El número de vueltas alrededor de un punto:** (a) Sea C la curva $z(t) = z(0) + R\exp(it)$, $t \in [a, b]$, siendo constantes $z(0)$ y $R \neq 0$. Demuestre que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C dz\, \frac{1}{z - z(0)} = \frac{b-a}{2\pi}. \tag{3.1}$$

(b) Compruebe que esta expresión toma un valor entero N si y solamente si C es un contorno cerrado. Nota: cuando C es cerrado, el número entero N se llama número de vueltas (y también el índice de C respecto del punto $z(0)$). Desde el punto de vista geométrico, representa el número de veces que el punto z rodea al $z(0)$ cuando z recorre C.

4°) **Un problemita tonto (sólo para practicar):** encuentre la conjugada armónica de la siguiente función armónica en $\mathbb{C}$:

$$u = u(x, y) = x^2 - y^2. \tag{4.1}$$

5°) **Un resultado sorprendente:** suponga que $f(z)$ es una función analítica en una región y que su módulo $|f(z)|$ es constante en esa región. Demuestre que $f(z)$ también es constante allí. Ayuda: use las ecuaciones de Cauchy-Riemann para mostrar que $f'(z) = 0$ en toda la región.

6°) **Integrales parecidas pero...:** siendo C la circunferencia $|z| = 1$, calcule las siguientes integrales:

$$\int_C \frac{dz}{z}, \quad \int_C \frac{dz}{|z|}, \quad \int_C \frac{|dz|}{z}, \quad \int_C \frac{dz}{z^2}, \quad \int_C \frac{dz}{|z^2|}, \quad \int_C \frac{|dz|}{z^2}. \tag{6.1}$$

7°) **Una integral más:** evalúe la integral

$$\int_C dz \left(1+\frac{1}{z}\right)^2, \tag{7.1}$$

donde C es el camino recto que une los puntos $z_1 = +1$ y $z_2 = +1$. Si cambia el camino ¿cambiará el valor de la integral? ¿Realmente se necesita conocer el camino que une a estos dos puntos?

8°) **Un resultado inesperado:** demuestre que si $a \in \mathbb{R}$, la siguiente integral:

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \exp\left[-(x+ia)^2\right], \tag{8.1}$$

no depende de a. Ayuda: considere la integral compleja $\oint_C dz \, \exp\left(-z^2\right)$, donde C es el rectángulo de vértices $-b$, b, $b+ia$ y $-b+ia$. Puede suponer sin pérdida de generalidad que $a > 0$. Demuestre que las integrales en la variable y se anulan al tomar el límite $b \to \infty$ (para esto use el sentido común). Si lo ha hecho bien, ya habrá notado que efectivamente se verifica el inesperado resultado $I(a) = I(0)$. Nota final: integrales de este tipo surgen en la mecánica cuántica no-relativista al estudiar el llamado paquete de ondas gaussiano.

9°) **Una integral (aparentemente) difícil:** (a) Siendo $0 < r < R$, integre la función

$$\frac{R+z}{(R-z)z} = \frac{1}{z} + \frac{2}{R-z} \tag{9.1}$$

sobre la circunferencia $|z| = r$ y calcule la siguiente integral:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta) + r^2}. \tag{9.2}$$

(b) Como un bono, integre $(R-z)^{-1}$ sobre $|z| = r$ (y usando el resultado que obtuvo en (a)), demuestre ahora que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{R\cos(\theta)}{R^2 - 2rR\cos(\theta) + r^2} = \frac{r}{R^2 - r^2}, \tag{9.3}$$

donde $0 \leq r < R$.

10°) **Representación espectral e integración compleja:** suponga que $\hat{L}$ es un operador simple, es decir, $\hat{L}$ es un operador tal que todo autovalor de $\hat{L}$ también es un autovalor de su adjunto $\hat{L}^\dagger$, además, todos los autovectores de tanto $\hat{L}$ y $\hat{L}^\dagger$ son de rango uno (por ejemplo, para $\hat{L}$ se tiene que $(\hat{L}-\lambda)u = 0$, siendo u el autovector y λ el autovalor) y los autovectores de tanto $\hat{L}$ o $\hat{L}^\dagger$ son una base del espacio. Sean $u_1, u_2, \ldots, u_N$, los autovectores de $\hat{L}$ correspondientes a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$. Si u es un vector arbitrario, podemos escribir

$$u = \sum_{i=1}^{N} c_i u_i, \tag{10.1}$$

$$\hat{L}u = \sum_{i=1}^{N} c_i \lambda_i u_i, \tag{10.2}$$

y por lo tanto

$$f(\hat{L})u = \sum_{i=1}^{N} c_i f(\lambda_i) u_i. \tag{10.3}$$

(a) Demuestre el siguiente resultado:

$$u = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\lambda \, (\lambda - \hat{L})^{-1} u, \tag{10.4}$$

siempre que el contorno sobre el cual se hace la integral encierra el espectro de $\hat{L}$, es decir, si encierra todos los autovalores de $\hat{L}$. Nota adicional: el operador $(\lambda - \hat{L})^{-1}$ es llamado el resolvente de $\hat{L}$: $\hat{R}_{\hat{L}}(\lambda) \equiv (\lambda - \hat{L})^{-1}$, donde λ pertenece al conjunto resolvente, es decir, allí donde existe $\hat{R}_{\hat{L}}(\lambda)$. El espectro de $\hat{L}$ son esos puntos donde $\hat{R}_{\hat{L}}(\lambda)$ no existe. (b) Ilustre el resultado (10.4) considerando que

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } \quad u = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Ayuda: al final, escriba el lado derecho de la expresión (10.4) como combinación lineal de los autovectores de $\hat{L}$. Otra nota: supongamos que no conocemos la representación espectral de $\hat{L}$. Se necesita únicamente evaluar la integral compleja

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C d\lambda \, \hat{R}_{\hat{L}}(\lambda) u,$$

y el cálculo de residuos, por ejemplo, debería proporcionarnos automáticamente la representación espectral para el vector u. De hecho, en la práctica, esta es una forma pesada e inconveniente de encontrar los autovalores y autovectores de una matriz. Sin embargo, se encuentra que para operadores más generales, tales como los operadores diferenciales, este método de evaluar la integral compleja del inverso de $\lambda - \hat{L}$ es una forma conveniente para obtener la representación espectral de $\hat{L}$. Nota: el resultado (10.4) se puede formular de una manera más general: "Sea $\hat{L}$ un operador simple finito-dimensional y sea $g(\lambda)$ una función analítica sobre el espectro de $\hat{L}$; entonces

$$g(\hat{L}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\lambda \, g(\lambda)(\lambda - \hat{L})^{-1}, \tag{10.5}$$

donde la integración es sobre cualquier curva que encierre el espectro de $\hat{L}$. En particular,

$$\hat{\mathbf{1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\lambda \, (\lambda - \hat{L})^{-1}, \tag{10.6}$$

siendo $\hat{\mathbf{1}}$ el operador identidad". La prueba de este teorema la puede obtener usando la fórmula (10.3), con $f(\hat{L}) = g(\hat{L})(\lambda - \hat{L})^{-1}$ y evaluando las integrales, por ejemplo, con el cálculo de residuos. Nota final: si le interesó el problema, le recomiendo consultar cualquier buen libro de análisis funcional, sin embargo, también puede consultar el excelente libro sobre matemáticas aplicadas: B. Friedman, Principles and Techniques of Applied Mathematics (Dover, New York, 1990), p. 117.