Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

Métodos Matemáticos de la Física II (2424)
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/metodosmatematicosdos.html`

Tarea 4
Cálculo en la variable compleja
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/metodosmatematicosdos(t4).pdf`

1°) **Un problema pendiente de la Tarea 3:** encuentre, en el sentido de distribuciones, la siguiente derivada con respecto a la variable y del límite $\lim_{x\to 0} x+iy$, es decir:

$$\frac{d}{dy}\left(\lim_{x\to 0} x+iy\right) = ? \tag{1.1}$$

Ayudas: (a) $x+iy=\sqrt{x^2+y^2}\exp\left[i\tan^{-1}(y/x)\right]$. (b) $\pi\delta(y)=\lim_{x\to 0} x/\left(x^2+y^2\right)$ (ésta es una representación de la delta de Dirac). (c) $\lim_{x\to 0}\exp\left[i\tan^{-1}(y/x)\right]=\exp\left[i\,\mathrm{sgn}(y)\pi/2\right]$. Aquí tiene la respuesta:

$$\frac{d}{dy}\left(\lim_{x\to 0} x+iy\right) = \mathrm{sgn}(y)\exp\left[i\,\mathrm{sgn}(y)\frac{\pi}{2}\right]. \tag{1.2}$$

Note que el lado derecho de (1.2) es simplemente i para todo $y\in(-\infty,+\infty)$. Asimismo, el lado izquierdo es obviamente i, lo cual confirma la veracidad del resultado (1.2).

2°) **El teorema de Rouché:** pruebe el llamado teorema de Rouché: "Si $F(z)$ y $G(z)$ son analíticas dentro y sobre una curva simple cerrada C y si $|G(z)|<|F(z)|$ sobre C, entonces $F(z)+G(z)$ y $F(z)$ tienen el mismo número de ceros en el interior de C". Aplique este teorema en la determinación del número de raíces de la ecuación $z^7-4z^3+z-1=0$, en el interior del círculo $|z|=1$.

3°) **Algunos límites útiles:** (a) Si $|F(z)|\leq M/R^k$ para $z=R\exp(i\theta)$, donde $k>1$ y $M>0$ son constantes, demuestre que

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma dz\,F(z)=0, \tag{3.1}$$

donde Γ es una semicircunferencia de radio R (la semicircunferencia se encuentra en el semiplano positivo $\mathrm{Im}(z)\geq 0$). (b) Si $|F(z)|\leq M/R^k$ para $z=R\exp(i\theta)$, donde $k>0$ y $M>0$ son constantes, demuestre que

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma dz\,\exp(imz)\,F(z)=0, \tag{3.2}$$

donde Γ es la misma semicircunferencia usada en la parte (a) y $m>0$ es una constante. Nota: este resultado es usualmente llamado el lema de Jordan.

4°) **El teorema del residuo no siempre es indispensable:** como se demostró en clase usando el

método de los residuos, si a y b son constantes reales, $a \neq 0$ y si $|a| > |b|$, entonces:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{1}{a + b\cos(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \tag{4.1}$$

Sean las constantes reales α y β:

$$\alpha \equiv \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \quad \beta \equiv \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}. \tag{4.2}$$

(a) Supongamos que $a > 0$, compruebe que se verifican las desigualdades $|\alpha| > 1$ y $|\beta| < 1$, así como las relaciones generales $\alpha\beta = 1$, $\alpha + \beta = -2a/b$ y $\alpha - \beta = -2\sqrt{a^2 - b^2}/b$. Nota: a continuación comprobará la potencia del análisis complejo para resolver integrales como la (4.1) sin usar el teorema del residuo. (b) Verifique que el integrando de la integral en (4.1) se puede escribir así:

$$\frac{1}{a + b\cos(\theta)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left[\frac{1}{1 - \beta\exp(i\theta)} + \frac{\beta\exp(-i\theta)}{1 - \beta\exp(-i\theta)} \right]. \tag{4.3}$$

(c) Ahora aplique todo lo que usted sabe de series para reescribir el término dentro del corchete. Justifique lo que haga. Si lo hizo bien ya habrá encontrado el valor de la integral pero de una manera muy simple. Ayuda: solo necesitará la llamada serie geométrica.

5°) **¿Singularidades aisladas o no?** Encuentre los puntos singulares de la función

$$F(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)} \tag{5.1}$$

¿Son todos estos puntos singularidades aisladas? Nota: como se discutió en clase, un punto singular es aislado si existe un entorno perforado alrededor de ese punto en el cual $F(z)$ si es analítica.

6°) **Halle los residuos en $z = 0$ de las siguientes funciones:**

$$\text{(a)} \ \frac{1}{z + z^2}, \quad \text{(b)} \ z\cos\left(\frac{1}{z}\right), \quad \text{(c)} \ \frac{z - \sin(z)}{z}, \quad \text{(d)} \ \frac{\cot(z)}{z^4}, \quad \text{(e)} \ \frac{\sinh(z)}{z^4(1 - z^2)}.$$

Respuestas: (a) 1, (b) $-1/2$, (c) 0, (d) $-1/45$, (e) $7/6$.

7°) **Algunas aplicaciones del teorema del residuo de Cauchy:** (a) Pruebe los siguientes resultados:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{x^2}{x^6 + 1} = \frac{\pi}{3}, \quad \int_0^{\infty} dx \, \frac{1}{x^3 + 1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, \quad \int_0^{\infty} dx \, \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\infty} dx \, \frac{1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

(b) Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{\cos(x)}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a}\exp(-a), \quad a > 0.$$

(c) Demuestre que

$$\left| \int_{-R}^{+R} dx \, \frac{\sin(x)}{x} - \pi \right| < \frac{\pi}{R}, \tag{7.1}$$

siendo $R > 0$. Ayuda: primero verifique la siguiente igualdad:

$$0 = \oint_C dz\, \frac{\exp(iz) - 1}{z} = \int_{-R}^{+R} dx\, \frac{\exp(ix) - 1}{x} + \int_\Gamma dz\, \frac{\exp(iz) - 1}{z},$$

donde Γ es una semicircunferencia de radio R (la semicircunferencia se encuentra en el semiplano positivo $\mathrm{Im}(z) \geq 0$) ¿Ya lo demostró? Nota: fíjese que el resultado (7.1) indica que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{\sin(x)}{x} = \pi.$$

(d) Siendo C la circunferencia $z = \exp(i\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, demuestre que

$$\int_0^{2\pi} d\theta\, \frac{1}{2 + \sin(\theta)} = \oint_C dz\, \frac{2}{z^2 + 4iz - 1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Verifique que el valor de la integral no cambia al sustituir $\sin(\theta)$ por $\cos(\theta)$. Ayuda: use el resultado (4.1) del problema 4° de esta tarea. (e) Si $a > 0$ es un número real ($a \neq 1$), demuestre que

$$I(a) \equiv \int_0^{2\pi} d\theta\, \frac{1}{1 - 2a\cos(\theta) + a^2} = \frac{2\pi}{a^2 - 1}\mathrm{sgn}(a - 1),$$

donde $\mathrm{sgn}(x)$ es la función signo. Ayuda: note que $I(1/a) = a^2 I(a)$.

8°) **Integrales impropias reales de funciones que presentan singularidades sobre el eje real:** las integrales impropias de funciones sobre el eje real

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, F(x)$$

donde $F(x)$ tiene polos simples sobre el eje real, se pueden evaluar usando el teorema del residuo en el sentido del valor principal de Cauchy. En efecto, supongamos que en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ están los polos *simples* de $F(z)$ sobre el eje real y en los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_m$ los polos de $F(z)$ en el semiplano superior ($\mathrm{Im}(z) > 0$). Sea Γ el camino semicircular de radio R lo suficientemente grande como para incluir todos los polos de $F(z)$ sobre el eje real y en el semiplano superior. El contorno sobre el eje real incluye un semicírculo C_k de radio pequeño ϵ alrededor de cada polo simple x_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) pero sin incluir estos puntos. (a) Compruebe que uno puede encontrar el valor principal de la integral por medio de la fórmula

$$\oint_C dz\, F(z) = \int_{-R}^{x_1 - \epsilon} + \int_{C_1} + \int_{x_1 + \epsilon}^{x_2 - \epsilon} + \int_{C_2} + \cdots + \int_{x_n + \epsilon}^{+R} dz\, F(z) = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\left[F(z), z = z_j\right]. \quad (8.1)$$

Note que los contornos C_k son trayectorias semicirculares en el sentido de las agujas del reloj y los $\mathrm{Res}\left[F(z), z = z_j\right]$ son los residuos de $F(z)$ en los puntos z_j ($j = 1, 2, \ldots, m$) que están en el semiplano superior. El límite $R \to \infty$ y $\epsilon \to 0$ debe tomarse para evaluar las integrales en la forma del valor principal de Cauchy sobre Γ y sobre los C_k para $k = 1, 2, \ldots, n$. Como se demostró en clase, si la función $F(z)$ decae para $R \to \infty$ de forma tal que $|F(z)| < M/R^p$, con $p > 1$ para $R \gg 1$, entonces se verifica el resultado

$$\lim_{R \to \infty} \int_\Gamma dz\, F(z) = 0. \quad (8.2)$$

(b) Ya que $F(z)$ tiene polos simples sobre el eje real, entonces en la vecindad de cada polo simple real x_k ésta tiene un término con potencia negativa de la forma

$$F(z) = \frac{\mathrm{Res}\,[F(z), z = x_k]}{z - x_k} + G(z), \tag{8.3}$$

donde $G(z)$ es la parte de $F(z)$ que es analítica en x_k y $\mathrm{Res}\,[F(z), z = x_k]$ son los residuos de $F(z)$ en x_k. Demuestre que la integral sobre la pequeña trayectoria circular alrededor de x_k en el límite $\epsilon \to 0$ nos da el siguiente resultado:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{C_k} dz\, F(z) = \lim_{\epsilon\to 0} \left[\mathrm{Res}\,[F(z), z = x_k] \int_{C_k} dz\, \frac{1}{z - x_k} + \int_{C_k} dz\, G(z) \right] = -\pi i\, \mathrm{Res}\,[F(z), z = x_k]\,. \tag{8.4}$$

(c) Usando los resultados (8.1) y (8.4), demuestra que el valor principal de la integral impropia real viene dado por:

$$\mathrm{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, F(x) = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\,[F(z), z = z_j] + \pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,[F(z), z = x_k]\,. \tag{8.5}$$

(d) Use el resultado (8.5) para evaluar la siguiente integral:

$$I(a) \equiv \mathrm{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{\sin(x)}{x\,(x^2 + a^2)},$$

donde $a > 0$. Ayuda: considere la función compleja $F(z) = \exp(iz)/z(z^2 + a^2)$ y además el siguiente resultado:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{\sin(x)}{x\,(x^2 + a^2)} = \mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{\exp(ix)}{x\,(x^2 + a^2)} \right].$$

Aquí tiene el resultado: $I(a) = \pi\,[1 - \exp(-a)]\,/a^2$.

9°) **Un resultadito muy útil:** "Supongamos que $F(z)$ tiene un polo *simple* en el punto $z = a$ con residuo a_{-1} y sea C un arco de la circunferencia $|z - a| = \epsilon$ que subtiende un ángulo central de valor ϕ. Entonces

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{C} dz\, F(z) = i\phi\, a_{-1}\text{''}.$$

Ayuda: como el polo es simple, $F(z) = G(z) + a_{-1}(z - a)^{-1}$, siendo $G(z)$ una función analítica en un entorno de $z = a$. Nota: si se integrase a lo largo de toda la circunferencia, sería $\phi = 2\pi$, y sin necesidad de suponer que $\epsilon \to 0$ por el teorema de los residuos la integral sería $2\pi i\, a_{-1}$. Este resultado indica que si se integra sobre una fracción de la circunferencia el valor de la integral es la correspondiente fracción de $2\pi i\, a_{-1}$, con la condición que el polo sea simple y que $\epsilon \to 0$.