Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

Métodos Matemáticos de la Física II (2424)
http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/metodosmatematicosdos.html

Tarea 6
Funciones Gamma y Beta
Ecuaciones diferenciales ordinarias
Funciones especiales
Problemas de Sturm-Liouville
http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/metodosmatematicosdos(t6).pdf

1°) **Un poderoso teorema de Weierstrass:** considere el siguiente teorema de Weierstrass para productos infinitos: "Sea $F(z)$ una función analítica en todo el plano complejo (excepto en $z = \infty$) y con ceros simples en $a_1, a_2, a_3, \ldots$, donde $0 < |a_1| < |a_2| < |a_3| \ldots$, y además $\lim_{k\to\infty} |a_k| = \infty$. Entonces $F(z)$ se puede expresar como el siguiente producto infinito:

$$F(z) = F(0) \exp\left[\frac{F'(0)}{F(0)} z\right] \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) \exp\left(\frac{z}{a_k}\right) \text{ ".} \tag{1.1}$$

(a) Use (1.1) para expresar $F(z) = \sin(z)/z$ en términos de un producto infinito de términos. De aquí, obtenga también la función $\sin(z)$ como un producto infinito. (b) Considere la función $F(z) = 1/\Gamma(z+1)$, que es analítica en todo el plano complejo y tiene ceros simples en $z = -1, -2, -3, \ldots$ ¿por qué? (c) Aplique la fórmula de Weierstrass para escribir a $F(z)$ en términos de un producto infinito de términos. Ayuda: no se preocupe por el valor de $F'(z)$ en $z = 0$. (d) Ahora, a partir del resultado obtenido en (c) escriba la función $1/\Gamma(1-z)$. (e) Use la fórmula $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ para escribir también a $1/\Gamma(z)$ como un producto infinito de términos. (f) Multiplique los resultados obtenidos en (d) y en (e) y relaciónelos con el obtenido en (a) para encontrar la famosa "fórmula de reflexión" (o "fórmula complemento") para la función Gamma:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(z\pi)}. \tag{1.2}$$

Nota: una fórmula de reflexión para una función $f(z)$ es una que relaciona $f(z)$ con $f(a-z)$, para alguna constante a. La fórmula complemento es entonces la fórmula de reflexión de la función Gamma, con $a = 1$.

2°) **La ecuación hipergeométrica de Gauss y la de Kummer:** como se discutió en clase, la ecuación hipergeométrica de Gauss tiene la forma

$$z\,(1-z)\,u''(z) + [c - (1+a+b)\,z]\,u'(z) - abu(z) = 0. \tag{2.1}$$

(a) Halle sus puntos singulares. Ayuda: recuerde que luego del cambio de variables $w = 1/z$, la EDO general lineal de segundo orden $u''(z) + P(z)u'(z) + Q(z)u(z) = 0$, se transforma en $u''(1/w) + p(w)u'(1/w) + q(w)u(1/w) = 0$, donde las primas se refieren a derivadas respecto a w, ademas, $p(w)w^2 = 2w - P(1/w)$ y $q(w)w^4 = Q(1/w)$. (b) Sustituya la transformación $x = bz$ en (2.1) y

encuentre la ecuación para $u(x)$. (c) Tome el límite $b \to \infty$ en la EDO obtenida en (b). Si lo ha hecho bien, usted deberá obtener la llamada ecuación de Kummer.

3°) **Sobre la solución en serie de una EDO no lineal:** halle la solución de la EDO no lineal $y''(x) + y^2(x) = x$ en la forma de una serie de potencias. Las condiciones de frontera son $y = 0$ y $y' = 1$, en $x = 0$.

4°) **Sobre las soluciones de la ecuación de Bessel:** como se estudió en clase, la solución general de la ecuación de Bessel, para todo ν, viene dada por

$$u(x) = A\, J_\nu(x) + B\, N_\nu(x). \tag{4.1}$$

La función $J_\nu(x)$ es la llamada función de Bessel de primera clase y de orden ν. $N_v(x)$ es la función de Bessel de segunda clase y de orden ν o función de Neumann y se define así:

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}. \tag{4.2}$$

(a) Encuentre $N_0(x)$ tomando el límite cuando $\nu \to n = 0$. Ayuda: use la regla de L'Hopital. Recuerde que $J_\nu(x)$ es la serie

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \tag{4.3}$$

Exprese su resultado final en términos de $J_0(x)$. Nota: recuerde que la función Digamma se define como $\psi(z) \equiv \Gamma'(z)/\Gamma(z)$, en particular, $\psi(1) = -\gamma$ (la constante de Euler-Mascheroni) y $\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} k^{-1}$ con $n \geq 2$ un entero positivo. (b) Como se mencionó en clase, si $u_1(x)$ es una solución de la EDO $u''(x) + P(x)u'(x) + Q(x)u(x) = 0$, entonces

$$u_2(x) = u_1(x) \int^x dy\, \frac{\exp\left(-\int P dy\right)}{u_1^2}, \tag{4.4}$$

es también una solución de la EDO, de manera que la solución general es $u(x) = a\, u_1(x) + b\, u_2(x)$, con a y b constantes arbitrarias. Siendo $u_1(x) = J_0(x)$, use (4.4) para encontrar una segunda solución de la ecuación de Bessel. Reconcilie este resultado con el obtenido en la parte (a).

5°) **Un cambio muy útil:** considere la EDO de segundo orden $u''(z) + P(z)u'(z) + Q(z)u(z) = 0$. (a) Demuestre que la sustitución $u(z) = v(z)p(z)$ nos proporciona otra ecuación diferencial lineal para $v(z)$. (b) Demuestre que si se conoce una solución de la ecuación de partida, entonces la otra puede hallarse integrando dos veces la ecuación para $v(z)$. (c) Demuestre que con una escogencia apropiada de $p(z)$ se puede eliminar el término que tiene la derivada primera en la ecuación obtenida en la parte (a). Ésta es la llamada forma canónica de la ecuación. (d) Demuestre que la sustitución $u(z) = v(z)p(z)$ en la ecuación de Bessel

$$z^2 u''(z) + z u'(z) + \left(z^2 - \nu^2\right) u(z) = 0, \tag{5.1}$$

siendo $p(z) = 1/\sqrt{z}$, nos proporciona la ecuación

$$v''(z) + \left(1 - \frac{n^2 - 0,25}{z^2}\right) v(z) = 0. \tag{5.2}$$

Esta ecuación, que no contiene término en la derivada primera, es muy conveniente para hallar el com-

portamiento aproximado de las funciones de Bessel para valores grandes de z. Nota final: si la ecuación de partida en vez de (5.1) hubiera sido $z^2u''(z) + zu'(z) + (\lambda^2 z^2 - \nu^2)u(z) = 0$, la correspondiente ecuación para $v(z)$ se obtendría de (5.2) simplemente haciendo el reemplazo $1 \to \lambda^2$ ¡Compruébelo!

6°) **Algunos resultados básicos que usted debe saber:** (a) Sean $u_1(x)$ y $u_2(x)$ soluciones de la EDO $u''(x) + P(x)u'(x) + Q(x)u(x) = 0$, demuestre que el llamado Wronskiano es

$$W\left[u_1(x), u_2(x)\right] \equiv \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} = \text{const} \times \exp\left[-\int^x dx\, P(x)\right]. \tag{6.1}$$

Esta es la llamada identidad de Abel. Nota: como la exponencial en (6.1) no es cero nunca, el Wronskiano es nulo si (y solo si) la constante en (6.1) es nula. El Wronskiano será distinto de cero si (y solo si) la constante es distinta de cero. En este último caso, $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son linealmente independientes. (b) Aunque se mencionó en clase, vale la pena que usted demuestre ahora (a partir de (6.1)) que si $u_1(x)$ es una solución conocida de la EDO, entonces

$$u_2(x) = u_1(x) \int^x dx\, \frac{\exp\left(-\int P dx\right)}{u_1^2} \tag{6.2}$$

es otra solución independiente. Nota: la solución general es $u(x) = a\, u_1(x) + b\, u_2(x)$, con a y b constantes arbitrarias. (c) Demuestre que cuando la EDO general de segundo orden $a_0(x)u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_2(x)u(x) = 0$, se expresa en la forma auto-adjunta, el Wronskiano es

$$W\left[u_1(x), u_2(x)\right] = \frac{\text{const}}{a_0(x)}. \tag{6.3}$$

(d) Pruebe que la segunda solución viene dada por

$$u_2(x) = u_1(x) \int^x dx\, \frac{1}{a_0(x)\, u_1^2(x)}. \tag{6.4}$$

7°) **Una fórmula Wronskiana para $J_\nu(z)$ y $J_{-\nu}(z)$:** demuestre que el Wronskiano para las funciones $J_\nu(z)$ y $J_{-\nu}(z)$ viene dado por

$$W\left[J_\nu(z), J_{-\nu}(z)\right] = -\frac{2\sin(\nu\pi)}{\pi z}. \tag{7.1}$$

Discuta el significado de este resultado desde el punto de vista de la dependencia lineal de $J_\nu(z)$ y $J_{-\nu}(z)$ (lo que ocurre cuando ν es entero). Ayuda: recuerde que $J_\nu(z)$ y $J_{-\nu}(z)$ verifican cada una la ecuación de Bessel e intente llegar a una expresión de la forma

$$\frac{d}{dx}\left[x\left(J_\nu\, J_{-\nu}' - J_{-\nu}\, J_\nu'\right)\right] = 0. \tag{7.2}$$

Integre esta ecuación, use los desarrollos en serie para $J_\nu(z)$ y $J_{-\nu}(z)$ y la famosa fórmula de reflexión para la función Gamma.

8°) **Sobre las soluciones de la ecuación de Legendre:** como usted sabe, los puntos $z = \pm 1$ son puntos singulares regulares de la EDO de Legendre. (a) Como $z = 0$ es un punto ordinario de la ecuación, existen dos soluciones independientes cada una en la forma de una serie de Taylor. Halle estas

soluciones. (b) Demuestre que (en efecto) las series convergen para $|z| < 1$, si n no es un número entero. (c) En las aplicaciones físicas con frecuencia se necesitan soluciones $u(z)$ que sean finitas para $|z| \leq 1$. Demuestre que si n es cero, o un entero, se obtienen soluciones polinomiales $P_n(z)$. (d) Verifique la relación $P_n(z) = P_{-1-n}(z)$. Las soluciones $P_n(z)$ con $n = 0, 1, 2, \ldots$ son los llamados polinomios de Legendre. (e) Eligiendo cada una de estas soluciones de modo que $P_n(1) = 1$, escriba las cinco primeras: $P_0(z)$, $P_1(z)$, $P_2(z)$, $P_3(z)$ y $P_4(z)$. (f) Verifique que los polinomios $P_n(z)$ se pueden generar a partir de la llamada fórmula de Rodrigues

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} \left(z^2 - 1\right)^n. \tag{8.1}$$

9°) **Más sobre los polinomios de Legendre:** (a) Demuestre que

$$\int_{-1}^{+1} dx\, P_n(x) P_m(x) = 0, \tag{9.1}$$

si $n \neq m$. (b) Pruebe que

$$\int_{-1}^{+1} dx\, P_n^2(x) = \frac{2}{2n+1}. \tag{9.2}$$

Ayuda: use la llamada función generadora de los polinomios de Legendre

$$G(x,t) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n. \tag{9.3}$$

(c) A partir de los resultados obtenidos en (a) y (b) compruebe que las funciones

$$\psi_n(x) \equiv \sqrt{n + \frac{1}{2}}\, P_n(x) \tag{9.4}$$

son ortonormales. Nota: el conjunto de polinomios de Legendre es completo en el espacio de funciones $\mathcal{L}^2(\Omega)$, con $\Omega = [-1, +1]$, es decir, cualquier función $F(x) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ puede representarse mediante la serie de polinomios de Legendre

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x), \tag{9.5}$$

con $c_n = \langle \psi_n, F \rangle$, la cual es convergente en $\mathcal{L}^2(\Omega)$. (e) Pruebe la siguiente fórmula de recurrencia para los polinomios de Legendre:

$$(n+1)\, P_{n+1}(x) - (2n+1)\, x P_n(x) + n P_{n-1}(x) = 0. \tag{9.6}$$

Ayuda: use la función generadora para estos polinomios.

10°) **Sobre los polinomios de Hermite:** (a) Use la función generatriz para los polinomios de Hermite de orden n: $H_n(x)$, y encuentre los cuatro primeros. (b) Demuestre también la relación

$$H_n'(x) = 2n H_{n-1}(x). \tag{10.1}$$

(c) Halle la llamada fórmula de Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n \exp\left(x^2\right) \frac{d^n}{dx^n} \exp\left(-x^2\right). \tag{10.2}$$

(d) Compruebe que un sistema completo de autofunciones ortonormales viene dado por:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{1}{4}} (n!)^{\frac{1}{2}}} H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{10.3}$$

11°) **Sobre la ecuación de Laguerre y sus soluciones:** (a) Resuelva la ecuación de Laguerre, es decir, halle una solución de la ecuación en la forma de una serie de potencias. (b) Demuestre que para ciertos valores de $\lambda = n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), dicha solución se reduce a un conjunto de polinomios, los llamados polinomios de Laguerre de grado n: $L_n(x)$. Nota: estos polinomios están estrechamente relacionados con el problema cuántico de un electrón que da vueltas en torno a un protón. (c) Compruebe que estos polinomios se pueden generar a partir de la siguiente fórmula de Rodrigues:

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} \exp(x) \frac{d^n}{dx^n} \left[x^n \exp(-x)\right]. \tag{11.1}$$

(d) Verifique la siguiente relación de recurrencia:

$$(n+1) L_{n+1}(x) - (2n+1-x) L_n(x) + n L_{n-1}(x) = 0. \tag{11.2}$$

(e) Compruebe que el conjunto de todos los polinomios de Laguerre es ortogonal sobre el intervalo $0 \leq x < \infty$, con respecto a la función peso $w(x) = \exp(-x)$. (f) Compruebe que las funciones $\psi_n(x) = \exp(-x/2) L_n(x)$ son un conjunto ortonormal (obviamente no con respecto a la función peso).

12°) **Un problema básico:** Escriba la ecuación de Bessel, la de Legendre, la de Hermite y la de Laguerre en la forma de Sturm-Liouville.

13°) **El problema de Sturm-Liouville más simple:** (a) Verifique que el sistema $u''(x) + \lambda u(x) = 0$, con la condición de frontera $u(0) = u(1) = 0$ es un problema de Sturm-Liouville. (b) Encuentre los autovalores y las autofunciones del sistema. (c) Encuentre el correspondiente conjunto de autofunciones normalizadas. (d) Desarrolle $F(x) = 1$ en una serie de tales funciones.