Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

Métodos Matemáticos de la Física II (2424)
http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/metodosmatematicosdos.html

Tarea 8
Ecuaciones diferenciales ordinarias
Funciones de Green
Ecuaciones diferenciales parciales
http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/metodosmatematicosdos(t8).pdf

1°) **Un problema típico:** una placa delgada rectangular ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$), tiene sus caras aisladas y sus cuatro lados mantenidos a temperatura cero: $u(0,y,t) = u(a,y,t) = u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0$. Su temperatura inicial es $u(x,y,0) = F(x,y)$. Halle la función $u(x,y,t)$, que además es solución de la EDP

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{1.1}$$

2°) **Otro problema típico con una condición de frontera no muy usual:** (a) Encuentre la solución de la siguiente EDP:

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad 0 \leq x \leq L\,, \quad t \geq 0, \tag{2.1}$$

que está sujeta a las condiciones $u'(0,t) = u'(L,t) = 0$ y $u(x,0) = F(x)$. (b) La misma condición de frontera pero con la condición inicial $u(x,0) = A = \text{const}$.

3°) **Sobre la EDP de Helmholtz:** (a) Estudie la EDP de Helmholtz $\nabla^2 u(r,\theta,\phi) + k^2 u(r,\theta,\phi) = 0$ en coordenadas esféricas. Encuentre las tres ecuaciones diferenciales ordinarias: la del oscilador armónico en la variable ϕ, la ecuación asociada de Legendre en la variable θ (investigue sobre ella), y la ecuación paramétrica de Bessel en la variable r (en esta última haga el cambio $R(r) = u(r)/\sqrt{r}$). Escriba la solución general de esta EDP. (b) Escriba la ecuación radial para $R(r)$ en el caso $k = 0$. Encuentre sus dos soluciones. Escriba la solución general de la EDP de Laplace. Nota: le recomiendo consultar la referencia: J. Mathews y R. L.Walker, "Mathematical Methods of Physics," (Addison-Wesley, Massachusetts, 1969), pag. 244.

4°) **Una función de Green muy simple:** como se demostró en clase, la EDO para el oscilador armónico lineal, $u''(x) + \lambda u(x) = 0$, sujeta a las condiciones de frontera $u(0) = u(1) = 0$, es equivalente a la siguiente ecuación integral de Fredholm:

$$u(x) = \lambda \int_0^1 dy\, g(x,y) u(y), \tag{4.1}$$

donde $\lambda = n^2\pi^2$. (a) Demuestre que la función de Green viene dada por $g(x,y) = x(1-y)$, para $0 \leq x \leq y$ y $g(x,y) = y(1-x)$, para $y \leq x \leq 1$. (b) Demuestre que esta misma función de Green

puede también escribirse de la siguiente manera:

$$g(x,y) = \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi x)\sin(n\pi y)}{n^2}. \tag{4.2}$$

Ayuda: no olvide que las autofunciones de la EDO para el oscilador armónico lineal satisfacen una relación de clausura.

5°) **Otra función de Green muy simple:** encuentre la función de Green para el siguiente problema: $u''(x)+u(x) = f(x)$, $0 \leq x \leq \pi/2$, con las condiciones de frontera $u(0)+u'(0) = 0$, $u(\pi/2)+u'(\pi/2) = 0$. Ayuda: no olvide que la función de Green satisface la EDO $u''(x) + u(x) = \delta(x-y)$, es decir, $u''(x) + u(x) = 0$ en los intervalos $0 \leq x \leq y$ y $y \leq x \leq \pi/2$.

6°) **Sobre la "reducción dimensional" de una EDP:** considere la EDP de Schrödinger independiente del tiempo para una partícula en un potencial,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\boldsymbol{r}) + V(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r}). \tag{6.1}$$

Piense ahora en la "reducción dimensional" de esta ecuación; le explico: escriba la ecuación en coordenadas esféricas. Para esto, use la siguiente expresión para el operador Laplaciano:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}. \tag{6.2}$$

La función ψ ahora depende de r, θ y ϕ. Considere la "reducción dimensional" donde r y θ son constantes pero ϕ es variable: $r = \text{const}$, $\theta = \pi/2$ (por lo tanto, el plano del movimiento es el plano $x-y$). (a) ¿Qué EDO satisface la función $\psi(r,\theta,\phi) \equiv \psi(\phi)$ con el potencial $V(r) = -k/r$? (b) Use la relación $E = p^2/2m + V$ (ésta es la expresión clásica estándar para la energía mecánica de un electrón que circula alrededor de un protón en reposo) y encuentre las funciones normalizadas $\psi(\phi)$. (c) Imponga sobre estas soluciones la condición de frontera periódica $\psi(\phi) = \psi(\phi+2\pi)$ y encuentre la condición de cuantización para p. (d) Para este sistema se verifica la relación $E = V/2$ (ésta es una consecuencia del teorema virial aplicado a este sistema). Encuentre ahora las energías E permitidas ¿Qué aprendió de este problema?

7°) **Otra función de Green ¿muy simple?:** encuentre la función de Green para el siguiente problema: $\partial_{xx}g(x,y) - k^2 g(x,y) = -\delta(x-y)$, donde x y y pertenecen al intervalo $[0,L]$ con las condición de frontera de Dirichlet $g(x=0,y) = g(x=L,y) = 0$. Note que la EDO para $g(x,y)$ no es la EDO para el oscilador armónico.

8°) **Una EDP no-lineal:** como usted sabe de su curso de Mecánica Clásica (o sabrá, si no lo ha visto aun), la EDP de Hamilton-Jacobi (dependiente de una sola variable espacial y del tiempo) tiene la forma

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V(x) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \tag{8.1}$$

donde $S = S(x,t)$ es la acción y $V(x)$ es la energía potencial de la masa m. Estudiemos el problema de una partícula que se desliza hacia abajo sin rozamiento sobre un plano inclinado fijo de ángulo θ. La coordenada x mide la posición de la masa sobre el plano inclinado desde su parte más alta; en este caso el potencial gravitacional $V(x)$ tiene la forma (suponiendo que es nulo justamente en la parte más

alta) $V(x) = -mgx\sin(\theta)$. (a) Suponga que la solución de (8.1) puede escribirse así

$$S(x,t) = S_1(x) + S_2(t). \tag{8.2}$$

Sustituya (8.2) en la ecuación de Hamilton-Jacobi y escriba las dos ecuaciones diferenciales ordinarias que resultan (llame α a la constante que surge de aplicar el método de separación de variables). (b) Resuelva cada una de estas ecuaciones y sustituya sus resultados en (8.2) para obtener la acción $S(x,t)$. Note que la acción, en este caso, solo depende de dos constantes arbitrarias. (c) Según el procedimiento estándar, para obtener a partir de $S(x,t)$ la solución de la ecuación de movimiento $x(t)$, la siguiente cantidad también debe ser una constante:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \beta = \text{const.} \tag{8.3}$$

Escriba la relación (8.3) (derivando $S(x,t)$ respecto de α e igualando esta cantidad a β) y encuentre x en función del tiempo t ($x(t)$). Ayuda: le conviene escribir a $x(t)$ en términos de $x(0)$ y $\dot{x}(0)$ ¿obtuvo lo que esperaba?

9°) **Revisión de un problema hecho en clase:** como usted sabe, la EDO para el problema del oscilador armónico simple, de masa m y frecuencia ω, pero sometido a una fuerza externa $F(t)$. tiene la forma

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F(t)}{m}\,, \quad t \geq 0. \tag{9.1}$$

donde $x(t)$ da la posición de la partícula en función del tiempo. Supondremos que las condiciones iniciales (no-homogéneas) para (9.1) son

$$x(t=0) = x_0\,, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)(t=0) = v_0. \tag{9.2}$$

Como es usual, la solución de (9.1) se puede escribir como la suma de una solución particular de (9.1) ($x_P(t)$) más la solución de la ecuación (9.1) con la condición $F(t) = 0$ (la llamada solución general de la ecuación homogénea $x_H(t)$). (a) Escriba a $x_H(t)$. (b) Suponiendo que la función de Green satisface la misma ecuación inhomogénea (9.1), pero con la fuerza $F(t)$ reemplazada por $\delta(t-t')$ (donde $t' \geq 0$), es decir,

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\right)(t,t') + \omega^2 G(t,t') = \frac{\delta(t-t')}{m}; \tag{9.3}$$

verifique entonces que $x_P(t)$ puede escribirse así:

$$x_P(t) = \int_0^\infty dt'\, G(t,t')F(t'). \tag{9.4}$$

(c) Conocida la solución general de (9.1) ($x(t) = x_H(t) + x_P(t)$), imponga sobre ésta y su primera derivada temporal las condiciones iniciales (9.2). Demuestre que el par de ecuaciones obtenidas por usted se satisfacen al relacionar x_0 y v_0 con las constantes arbitrarias de la solución $x_H(t)$, pero además se tienen ahora condiciones (iniciales) homogéneas para $G(t,t')$ y su derivada parcial respecto de t. Ayuda: aquí tiene esas dos condiciones homogéneas:

$$G(0,t') = 0\,, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)(0,t') = 0. \tag{9.5}$$

Ahora usted resolverá la ecuación (9.3) siguiendo uno de los últimos procedimientos estudiados en clase. (d) Escriba una solución fundamental (o particular) para (9.3) ($G_P(t,t')$) y que sea continua en $t = t'$ así como discontinua allí, es decir,

$$G_P(t'+,t') - G_P(t'-,t') = 0, \tag{9.6}$$

$$\left(\frac{\partial G_P}{\partial t}\right)(t'+,t') - \left(\frac{\partial G_P}{\partial t}\right)(t'-,t') = \frac{1}{m}. \tag{9.7}$$

Ayuda: como se demostró en clase para un problema similar, la solución $G_P(t,t')$ tiene la forma

$$G_P(t,t') = C\exp\left(i\omega\left|t-t'\right|\right), \tag{9.8}$$

donde C es una constante que usted podría obtener, por ejemplo, imponiendo sobre (9.8) la condición (9.7). (e) Escriba ahora la solución general de (9.3) en la forma

$$G(t,t') = G_H(t,t') + G_P(t,t'), \tag{9.9}$$

donde $G_H(t,t')$ satisface (9.3) con $\delta(t-t') = 0$ (es decir, es la solución general de la ecuación (9.3) pero homogénea). (f) Imponga ahora sobre (9.9) las condiciones (iniciales) homogéneas (9.5) y escriba finalmente a $G(t,t')$. (g) Escriba la solución de (9.3) obtenida en (f) en los casos $t > t'$ y $t < t'$ y trate ahora de obtener una expresión "compacta" para $G(t,t')$ que involucre a la función de Heaviside $\Theta(t-t')$. Es muy fácil ¿ya lo logró? (h) Finalmente, sustituya el último resultado obtenido en (g) en la expresión (9.4) y escriba la función $x(t)$.