Introducción a los Grupos y Álgebras de Lie
Tarea 1
Fecha de entrega: 26-07-2016

1. Probar que sólo hay dos grupos de orden 4, $\mathbb{Z}_4$ y D_2.

2. Para el grupo diédrico D_4 (grupo de simetrías de un cuadrado): a) enumerar los elementos, las clases, los subgrupos, los subgrupos invariantes y los grupos factor, b) indicar si D_4 es producto directo de algunos de sus subgrupos, c) enumerar las representaciones y construir la tabla de caracteres.

3. Dado un homomorfismo $\varphi : G \to G'$, se define:

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(g) \in G' \mid g \in G\} \ ,$$
$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e'\} \ ,$$

   donde e' es la identidad en G'. Demostrar: a) $\mathrm{Im}(\varphi)$ es un subgrupo de G', b) $\mathrm{Ker}(\varphi)$ es un subgrupo *invariante* de G.

4. Utilizar el resultado del problema 3 para demostrar que el grupo alternante $\mathcal{A}_n$ es un subgrupo invariante del grupo de permutaciones $\mathcal{S}_n$. `Ayuda:` Considerar el homomorfismo de $\mathcal{S}_n$ a $\mathbb{Z}_2$ dado por la paridad de la permutación.