Introducción a los Grupos y Álgebras de Lie
Tarea 2
Fecha de entrega: 06-10-2016

1. Para el grupo $O(2) = \{R_{2\times 2} | R^T R = \mathbb{1}\}$, demostrar:
   a) $O(2)$ es no Abeliano.
   b) $O(2)$ es disconexo.
   c) $SO(2)$ es un subgrupo invariante de $O(2)$.

2. Para el grupo $SL(2,\mathbb{R}) = \{A_{2\times 2} | \det A = 1\}$:
   a) Obtener el álgebra de Lie $sl(2,\mathbb{R})$.
   b) Demostrar que existen elementos del grupo que no se pueden obtener por exponenciación.

3. Demostrar:
   a) $sl(2,\mathbb{R}) \approx so(2,1) \approx su(1,1)$.
   b) $SL(2,\mathbb{R}) \approx SU(1,1)$.
   c) $SO(2,1) \approx SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$.

4. Demostrar que el álgebra del grupo conforme en tres dimensiones (Euclídeas) es isomorfa al álgebra del grupo $SO(4,1)$.
   Ayuda: Los elementos del grupo conforme dejan invariante la métrica $\eta_{ij} = \delta_{ij}$ excepto por un factor de escala. Una transformación infinitesimal

$$x'^i = x^i + \epsilon^i$$

   que satisface esta condición puede tener

$$\epsilon^i = \begin{cases} a^i & \text{traslaciones, generadores } P_i \\ \lambda x^i & \text{dilataciones, generador } D \\ \omega^i_j x^j & \text{rotaciones, generadores } J_i \\ b^i x^2 - 2(b\cdot x)x^i & \text{transformaciones especiales conformes, generadores } K_i \end{cases} .$$

   Los parámetros a^i, λ, ω^i_j and b^i son constantes. La matriz ω es antisimétrica.
   Los generadores de $SO(4,1)$ son $T^{\alpha\beta}$, con métrica $\eta = \mathrm{diag}(-1,1,1,1,1)$. Verificar que:

$$P_i = T_{i4} + T_{i0} \quad ; \quad J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}T^{jk} \quad ; \quad K_i = T_{i4} - T_{i0} \quad ; \quad D = T_{04} \; .$$