Electromagnetismo, Práctica 1 **7-11-2011**

1. (Purcell 2.4) Dado el potencial:
$$\Phi(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{V_0}{a^2}(x^2+y^2+z^2) & , \ (x^2+y^2+z^2) < a^2 \\ -V_0 + \dfrac{2V_0 a}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & , \ (x^2+y^2+z^2) > a^2 \end{cases} ,$$
hallar: a) el campo eléctrico, b) la distribución de carga correspondiente. V_0 es constante.

2. Un cubo de lado a, con caras en $x = 0, a$, $y = 0, a$, y $z = 0, a$, tiene densidad de carga constante ρ_0. Hallar los primeros tres términos de la expansión multipolar del potencial creado por el cubo.

3. (Purcell 3.13) Hallar la energía total del campo electrostático en un condensador esférico formado por un conductor hueco interior de radio a y carga q, rodeado por un conductor hueco exterior de radio b y carga $-q$. Determinar el valor de la capacidad a partir de este resultado.

4. (Griffiths 3.18) Una esfera de radio a se mantiene a potencial dado por
$$\Phi\,|_{r=a} = V_0 \, \cos 3\theta$$
donde V_0 es constante. El potencial satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2\Phi = 0$ en todo el espacio. a) Hallar Φ en el interior y el exterior de la esfera. b) Hallar la densidad de carga superficial sobre la esfera.

5. a) Hallar el potencial en el interior de un cilindro de radio a y altura L ($0 \le \rho \le a$, $0 \le z \le L$, $0 \le \varphi \le 2\pi$). El potencial satisface la ecuación de Laplace y las condiciones de frontera:
$$\Phi(a,\varphi,z) = 0 \quad ; \quad \Phi(\rho,\varphi,0) = 0 \quad ; \quad \Phi(\rho,\varphi,L) = f(\rho,\varphi)$$
   b) Determinar explícitamente la solución si $f(\rho,\varphi) = f(\rho) = V_0(1 - \dfrac{\rho^2}{a^2})$, con V_0 constante.

6. (Jackson, sección 2.5) Dos cargas puntuales $-q$ y q se encuentran en los puntos $(0,0,R)$ y $(0,0,-R)$ respectivamente. Una esfera conductora de radio $a < R$ y centro en el origen se mantiene a potencial cero. a) Hallar el potencial en el exterior de la esfera. b) Determinar el límite de Φ cuando $R \gg r$.

Respuestas

1) a) $\overrightarrow{E} = -\dfrac{2V_0 r}{a^2}\hat{r}$, $r < a$; $\overrightarrow{E} = \dfrac{2V_0 a}{r^2}\hat{r}$, $r > a$; b) $\rho = -\dfrac{6V_0\varepsilon_0}{a^2}$, $r < a$; $\sigma = \dfrac{4V_0\varepsilon_0}{a}$, $r = a$

2) $\Phi(x,y,z) = \dfrac{\rho_0 a^3}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\dfrac{1}{r} + \dfrac{a}{2r^3}(x+y+z) + \dfrac{a^2}{8r^5}(xy+xz+yz) + \cdots\right\}$

4) a) $\Phi(r,\theta) = \dfrac{V_0}{5}\left[8\left(\dfrac{r}{a}\right)^3 P_3(\cos\theta) - 3\left(\dfrac{r}{a}\right)P_1(\cos\theta)\right]$, $r < a$; b) $\sigma(\theta) = \dfrac{V_0}{5}(140\cos^2\theta - 93)\cos\theta$

5) b) $\Phi(\rho,z) = 8V_0 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{x_{0n}\rho}{a}\right)\operatorname{senh}\frac{x_{0n}z}{a}}{x_{0n}^3 J_1(x_{0n})\operatorname{senh}\frac{x_{0n}L}{a}}$