

El campo  $\mathbf{B}$  macroscópico dentro de la materia resultará ser el promedio del  $\mathbf{B}$  microscópico, tal como el  $\mathbf{E}$  macroscópico resultaba ser el promedio del  $\mathbf{E}$  microscópico.

La diferencia en la definición, no tiene consecuencias prácticas puesto que  $\chi_m$  es un número muy pequeño comparado con la unidad. Los valores de  $\chi_m$  para substancias diamagnéticas puras, sólidas o líquidas, normalmente están entre  $-0,5 \times 10^{-6}$  y  $-1,0 \times 10^{-6}$ . Incluso para el oxígeno, bajo las condiciones expresadas en la tabla 11.1, la susceptibilidad paramagnética es menor de  $10^{-3}$ . Esto significa que el campo magnético originado por los momentos dipolares de la substancia, al menos en una media a gran escala, es mucho más débil que el campo aplicado  $\mathbf{B}$ . Esto nos da cierta indicación de que, en tales sistemas, podemos suponer que el campo que actúa sobre los dipolos atómicos, para orientarlos, es el mismo que el campo que existiría allí en ausencia de la muestra. Sin embargo, nos interesan otros sistemas en los que el campo de los dipolos magnéticos *no* es pequeño. Por lo tanto, deberemos estudiar, igual que hicimos en el caso de la polarización eléctrica, los campos magnéticos que la materia imanada produce, tanto en el interior como en el exterior del material.

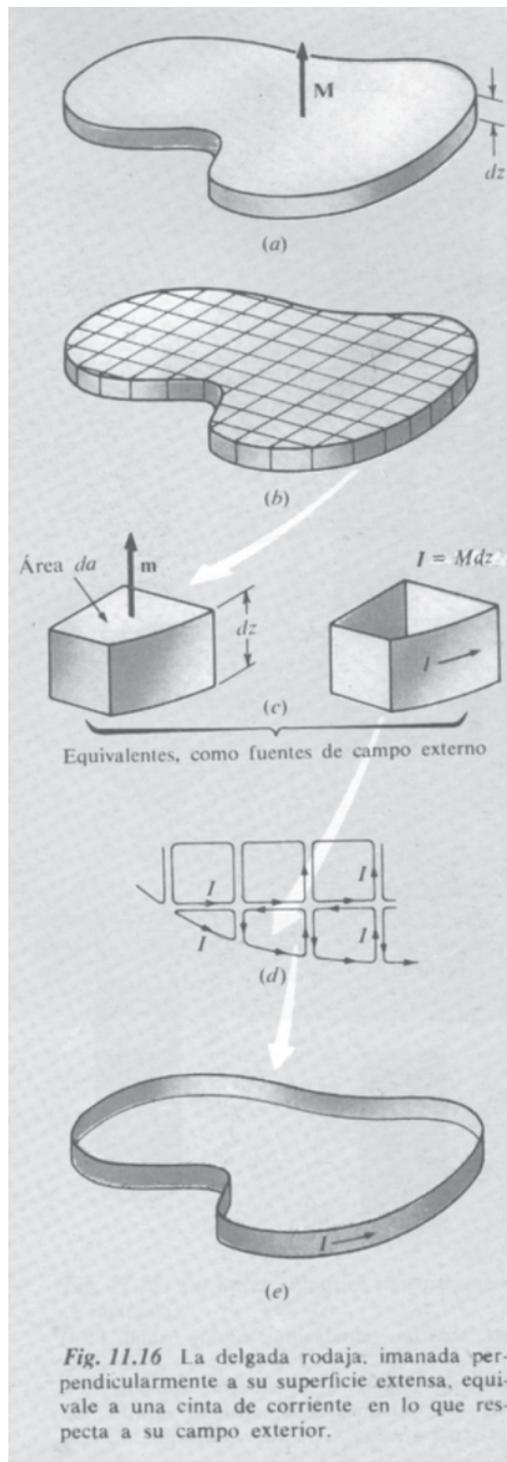


Fig. 11.16 La delgada rodaja, imanada perpendicularmente a su superficie extensa, equivale a una cinta de corriente en lo que respecta a su campo exterior.

### 11.8 Campo magnético creado por la materia imanada

Un bloque material que contiene, uniformemente distribuidos en todo su volumen, un gran número de dipolos magnéticos atómicos, orientados todos en la misma dirección, se dice que está *uniformemente imanado*. El vector imanación  $\mathbf{M}$  sencillamente vale el producto del número de dipolos orientados por unidad de volumen por el momento magnético  $\mathbf{m}$  de cada dipolo. No nos preocupamos de cómo se mantiene la orientación de estos dipolos. Puede ser debido a un campo aplicado producido por otra fuente, pero esto no nos importa. Lo que queremos estudiar es, solamente, el campo creado por los propios dipolos.

Consideremos primero una rodaja de material, de espesor  $dz$ , cortada perpendicularmente a la dirección de imanación, como se indica en la Fig. 11.16a. Esta rodaja se puede subdividir en pequeñas porciones. Cada una de estas pequeñas porciones o celdillas, que tiene una superficie superior de área  $da$ , posee un momento dipolar total que vale  $M da dz$ , puesto que  $M$  es el momento dipolar por unidad de volumen (Fig. 11.16b). El campo magnético que produce esta celdilla en puntos *distantes* — o sea, distantes respecto al tamaño de la celdilla — es exactamente el mismo que el de cualquier dipolo del mismo momento. Podríamos construir un dipolo, de esta intensidad, doblando una cinta conductora, de ancho  $dz$ , en la forma de la celdilla, y mandando a lo largo de la espira una corriente  $I = M dz$

(Fig. 11.16c). Esto dará a la espira un momento dipolar:

$$m = I \times \text{área} = M dz da = M da dz \tag{41}$$

que es el mismo que el de la celdilla.

Sustituycamos cada celdilla de la rodaja, por una espira recorrida por aquella corriente, como se indica en la Fig. 11.16d. La corriente es la misma en todos ellos, y por lo tanto, en cualquier entorno interior, encontraremos corrientes iguales y de sentido contrario, equivalente a corriente nula. Nuestro conjunto de espiras, por lo tanto, equivale a una cinta única en el contorno, con una corriente  $M dz$  (Fig. 11.16e). Ahora bien, estas espiras se pueden hacer muy pequeñas, en tanto la subdivisión no alcance el tamaño molecular. Debe ser lo suficiente grande para que la imanación no varíe apreciablemente de una celdilla a otra. Dentro de esta limitación, podemos afirmar que el campo en cualquier punto exterior, incluso próximo a la rodaja, es el mismo que el de la cinta recorrida por la citada corriente.

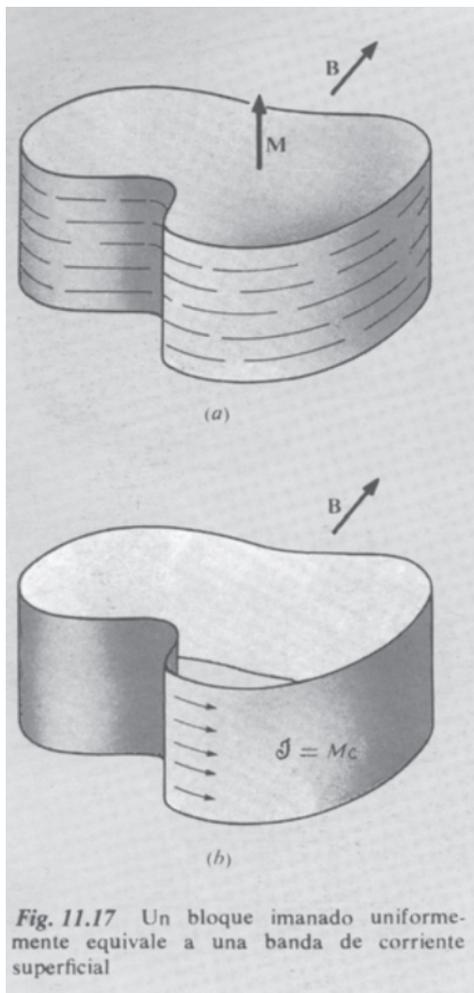
Solamente nos queda reconstruir un bloque a partir de tales láminas, o rodajas, como en la Fig. 11.17a. El bloque entero es equivalente a la cinta ancha de la Fig. 11.17b a lo largo de la cual circula una corriente  $M dz$  en cada franja  $dz$ , o dicho más simplemente, una corriente superficial de densidad  $\mathcal{J}$ , en A/m, dada por

$$\mathcal{J} = M \tag{42}$$

El campo magnético  $\mathbf{B}$ , en cualquier punto fuera del bloque imanado de la Fig. 11.17a, e incluso próximo al bloque, mientras no nos acerquemos a distancias moleculares, es el mismo que el campo  $\mathbf{B}'$  en el punto correspondiente en las proximidades de la cinta ancha de la Figura 11.17b.

¿Pero, y el campo en el interior del bloque imanado? Aquí nos enfrentaremos con una cuestión parecida a la que ya encontramos en el Cap. 10. En el interior de la materia, el campo magnético no es uniforme si lo observamos a escala atómica, a la que hemos llamado « microscópica ». Varía bruscamente, tanto en módulo como en dirección, entre puntos separados solamente por unos angstrom. Este campo *microscópico*  $\mathbf{B}$  es un campo magnético en el vacío, pues desde el punto de vista microscópico, como ya se subrayó en el Cap. 10, la materia es una agrupación de partículas y cargas eléctricas en un espacio vacío. El único campo a gran escala que puede definirse dentro de la materia, es el promedio espacial del campo microscópico.

Debido a la ausencia de efectos atribuibles a la carga magnética, creemos que el campo magnético microscópico satisface en sí a  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ . Si esto es cierto, puede hallarse directamente que, el promedio espacial del campo microscópico interno, en nuestro bloque, es el mismo que el campo  $\mathbf{B}'$  en el interior de la cinta de corriente equivalente.



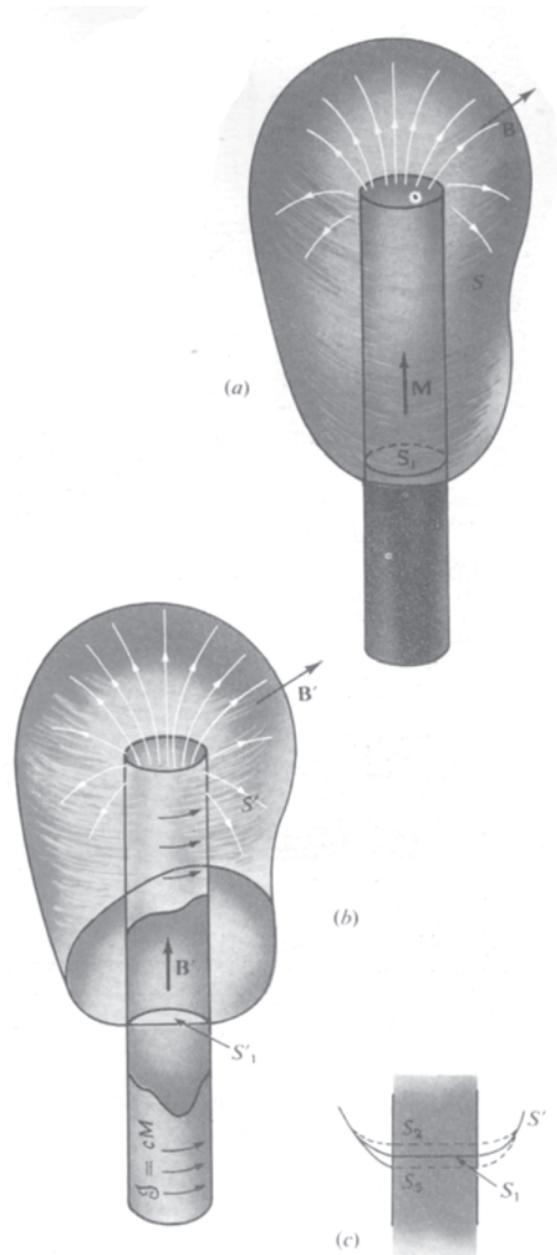
Para demostrarlo, consideremos la barra larga uniformemente imanada, paralelamente a su longitud, como se indica en la Fig. 11.18a. Ya hemos dicho que el campo en el exterior sería el mismo que el del cilindro recorrido por una corriente (prácticamente equivalente a un solenoide de una sola capa) representado en la Fig. 10.18b.  $S$  en la Fig. 11.18a. indica una superficie cerrada que incluye una porción de  $S_1$  al pasar por el interior de la varilla. Puesto que  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  para el campo interno microscópico, así como para el exterior,  $\text{div } \mathbf{B}$  es nula en todas partes del volumen limitado por  $S$ . Se sigue luego que, por el teorema de Gauss, la integral de superficie de  $\mathbf{B}$  extendida sobre  $S$  debe ser nula. La integral de superficie de  $\mathbf{B}'$  extendida sobre la superficie cerrada  $S'$  debe ser también nula. Sobre las porciones de  $S$  y  $S'$  exteriores a los cilindros,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{B}'$  son idénticos. Por lo tanto la integral de superficie de  $\mathbf{B}$  extendida al disco interno  $S_1$  debe ser igual a la integral de  $\mathbf{B}'$  extendida al disco interno  $S'_1$ . Esto debe cumplirse, asimismo, para cualquier par de discos paralelos próximos tales como  $S_2, S_3$ , etc., indicados en la Fig. 11-18c, a causa de que el campo en el exterior del cilindro en sus proximidades puede despreciarse por pequeño, así que las partes exteriores no cambian nada. Tomando ahora la integral de superficie sobre una serie de planos igualmente distanciados, que es una manera correcta de medir el promedio de  $\mathbf{B}$  en el volumen en esta región, pues toma imparcialmente las muestras de todos los elementos de volumen. Se deduce que la media espacial del campo microscópico  $\mathbf{B}$  dentro de la varilla imanada es igual al campo  $\mathbf{B}'$  en el interior de la corriente superficial cilíndrica de la Fig. 11.18b.

Es instructivo comparar los razonamientos que hemos desarrollado en nuestro análisis de las correspondientes cuestiones en el Capítulo 10. La Fig. 11.19 nos lo muestra por separado. Veremos que discurren lógicamente paralelos, pero que en cada punto hay una diferencia que refleja la asimetría esencial encontrada en la observación de que las *cargas eléctricas* son las fuentes de *campos eléctricos*, mientras que las *cargas eléctricas en movimiento* son las fuentes de los *campos magnéticos*. Por ejemplo, en los razonamientos acerca del valor medio del campo microscópico, la clave del problema en el caso eléctrico es el supuesto que  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ , para el campo eléctrico microscópico. En el caso magnético, la clave es el suponer que  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  para el campo magnético microscópico.

Si la imanación  $\mathbf{M}$ , en el interior del volumen de cierto material, no es uniforme, sino que varía con la posición tal que  $\mathbf{M}(x, y, z)$ , la distribución de corriente equivalente viene dada por

$$\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{M} \quad (43)$$

Veamos cómo llegamos a esto en un caso determinado. Supongamos que hay una imanación en la dirección  $z$ , que se hace más intensa a medida que nos desplazamos a lo largo del eje  $y$ . Esto está representado en la Fig. 11.20a, que nos muestra una pequeña región del material subdividida en pequeños bloques. Se supone que los bloques



**Fig. 11.18** (a) Barra cilíndrica uniformemente imanada.

(b) Cilindro hueco equivalente, o funda, de corriente.

(c) Podemos obtener el promedio espacial del campo microscópico, tomando las superficies paralelas,  $S_1, S_2, \dots$ , poco separadas.

(a) Fuente de un campo eléctrico externo  $E$ .

es equivalente a

debido a que una porción de materia polarizada de volumen  $da \cdot dz$  tiene un momento dipolar igual al de:

Un bloque polarizado uniformemente puede subdividirse en tales varillas. De aquí que el bloque tiene el mismo campo exterior que dos láminas con carga superficial  $\sigma = P_n$

(De manera más general, para polarización no uniforme, la materia polarizada equivale a una distribución de carga  $\rho = -\text{div } \mathbf{P}$ ).

(b) Fuente de un campo magnético externo  $B$ .

es equivalente a

debido a que una porción de materia imanada, de volumen  $da \cdot dz$  tiene un momento dipolar igual al de:

Un bloque imanado uniformemente puede dividirse en tales capas. De aquí que el bloque que tenga el mismo campo exterior que la cinta ancha con una corriente superficial  $\mathcal{J} = M$ .

(De manera más general, para imanación no uniforme, la materia imanada equivale a una distribución de corriente  $\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{M}$ ).

PRUEBA DE QUE LA EQUIVALENCIA SE EXTIENDE AL PROMEDIO ESPACIAL DE LOS CAMPOS INTERNOS

Consideremos una lámina ancha, delgada uniformemente polarizada y sus capas de carga superficial equivalente. Cerca del punto medio el campo exterior es despreciable y  $E'$  es uniforme. Si  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  para el campo interno, entonces  $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ . Pero  $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$  en el camino exterior. De aquí  $\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^{2'} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}'$  para todos los caminos internos.

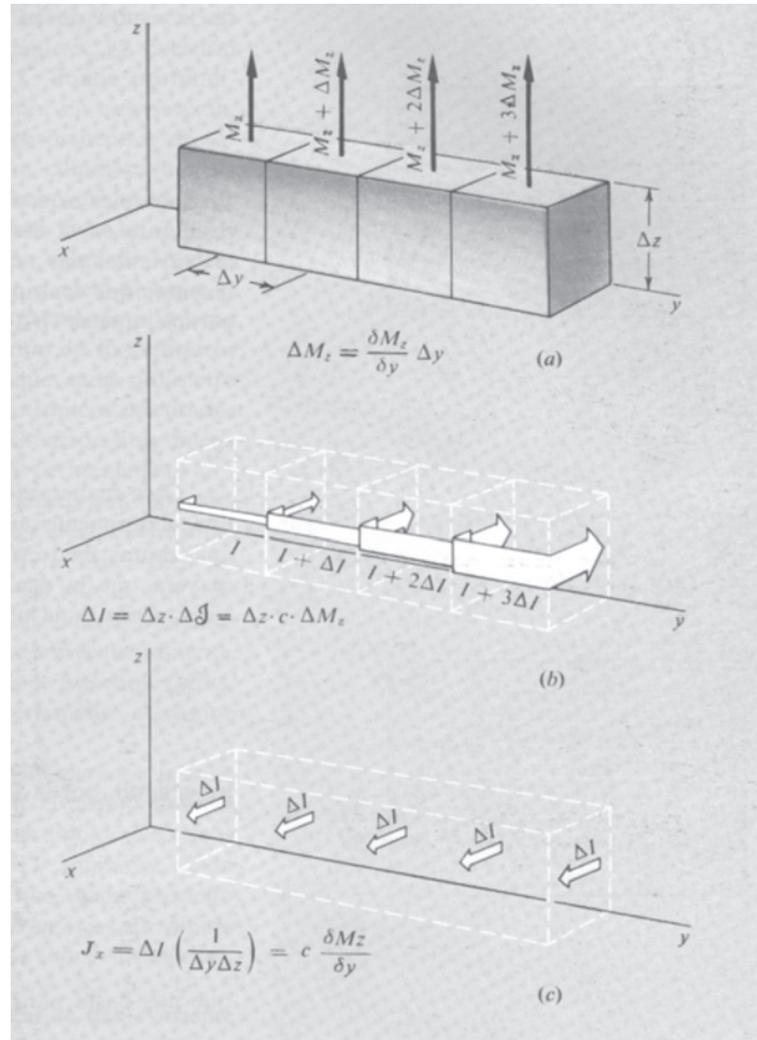
CONCLUSIÓN

$\langle \mathbf{E} \rangle = \mathbf{E}'$ ; el promedio espacial del campo eléctrico interno es igual al campo  $\mathbf{E}'$  que se produciría en un punto en el vacío por la distribución de carga equivalente descrita antes (junto con todas las fuentes exteriores).

Consideremos una columna larga uniformemente imanada y su cilindro equivalente de corriente superficial. Cerca del punto medio el campo exterior es despreciable y  $B'$  es uniforme. Si  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , para el campo interno, entonces  $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$ .

Pero  $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$  en la superficie exterior a la columna. De aquí  $\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_{S_1'} \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{a}'$  sobre cualquier porción de superficie interior como  $S_1, S_2$ , etc.

Fig. 11.19 Comparación de los casos eléctrico (a) y magnético (b).



**Fig. 11.20** La imanación no uniforme es equivalente a una densidad cúbica de corriente.

son tan pequeños para que pueda considerarse que la imanación, dentro de un mismo bloque, es uniforme. De esta manera podemos reemplazar cada bloque con una cinta recorrida por una corriente, con una densidad superficial  $\mathcal{J} = M_z$ . La corriente  $I$  que circula por tal cinta, si el bloque tiene altura  $\Delta z$ , es  $\mathcal{J} \Delta z$ , o  $M_z \Delta z$ . Ahora bien, cada cinta tiene un poco más de densidad de corriente que la

que tiene a su izquierda. La corriente en cada espira es mayor que la de la espira de su izquierda en

$$\Delta I = \Delta z \Delta M_z = \Delta z \frac{\partial M_z}{\partial y} \Delta y \quad (44)$$

En cualquier cara de unión de esta fila de bloques, hay una corriente resultante en la dirección  $x$  de valor  $\Delta I$  (Fig. 11.20c). Para obtener la corriente, por unidad de superficie, que circula en la dirección  $x$ , tenemos que multiplicar por el número de bloques por unidad de superficie, que es  $1/(\Delta y \Delta z)$ . Así

$$J_x = \Delta I \left( \frac{1}{\Delta y \Delta z} \right) = \frac{\partial M_z}{\partial y} \quad (45)$$

Otra manera de obtener una corriente en la dirección  $x$  es tener una componente  $y$  de la imanación que varíe en la dirección  $z$ . Si analizamos bien este caso, usando una columna vertical de bloques, se verá que la densidad de la corriente resultante dirigida según el eje  $x$ , viene dada por

$$J_x = - \frac{\partial M_y}{\partial z} \quad (46)$$

En general, por la superposición de estos dos casos,

$$J_x = \left( \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) = (\text{rot } \mathbf{M})_x \quad (47)$$

que nos basta para establecer la Ec. 43.

### 11.9 Campo de un imán permanente

Las esferas y barras uniformemente polarizadas, de las que hablamos en el Cap. 10, pueden verse a menudo, incluso en el laboratorio. La polarización eléctrica congelada en el interior puede ocurrir en algunas sustancias, aunque generalmente está enmascarada por cierta acumulación de carga libre. Para lograr la Fig. 11.3a, para indicar cómo se vería el campo de una barra polarizada, fue necesario usar dos discos cargados. Por otra parte, los cuerpos con polarización

magnética permanente, es decir, con *imánación* permanente, son conocidos y útiles. Los imanes permanentes pueden hacerse de muchas aleaciones y compuestos de sustancias ferromagnéticas. La cuestión de tal posibilidad la dejaremos para la Sec. 11.11, donde profundizaremos brevemente en la física del ferromagnetismo. En esta sección, dando por supuesta la existencia de los imanes permanentes, deseamos estudiar el campo magnético  $\mathbf{B}$  de una barra cilíndrica uniformemente imanada, y lo compararemos con el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  de una barra, uniformemente polarizada, de la misma forma.

La Fig. 11.21, representa a cada uno de estos cilindros sólidos, en sección recta. En cada caso, la polarización es paralela al eje y es uniforme. O sea, la polarización  $\mathbf{P}$  y la imanación  $\mathbf{M}$  tienen el mismo módulo, dirección y sentido en todo punto interior de los cilindros respectivos. En el caso magnético, esto implica que cada milímetro cúbico del imán tenga el mismo número de spin electrónicos orientados en la misma dirección. (Puede obtenerse una aproximación muy buena de esto con los modernos materiales para imanes permanentes.)

Por campo en el interior del cilindro queremos decir, por supuesto, el campo macroscópico, definido como el promedio espacial del campo microscópico. Establecido esto, representamos en la Fig. 11.21 las líneas de campo, en el interior y en el exterior de las barras. Por descontado, estas barras no deben estar muy cerca una de otra; ponemos juntos los diagramas, sólo para poderlos comparar convenientemente. Cada barra está aislada en un espacio libre de campos externos. (¿Cuál de los dos podemos creer que modificaría más seriamente el campo del otro, si *estuvieran* cercanos?)

En el exterior de las barras, los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  *parecen iguales*. En realidad las líneas de campo siguen exactamente el mismo camino. Esto no debe sorprendernos si recordamos que los dipolos eléctricos y los dipolos magnéticos tienen «campos lejanos» similares. Cada pequeño trozo de un imán es un dipolo magnético, cada pequeño trozo de barra polarizada (a veces llamada «*electrete*») es un dipolo eléctrico, y el campo exterior es la superposición de todos sus campos lejanos.

El campo  $\mathbf{B}$ , dentro y fuera, es el mismo que el de una corriente en una superficie cilíndrica. En realidad, si bobinamos muy uniformemente, sobre un cilindro de cartón, un solenoide de hilo fino y lo conectamos a una batería, reproduciremos el campo exterior e interior,  $\mathbf{B}$ , de un imán permanente. (La bobina se calentaría, la batería se descargaría; los spin electrónicos nos proporcionan la corriente gratis y sin rozamiento.) El campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , tanto en el interior como en el exterior, de la barra polarizada, es el de dos discos cargados, uno en cada extremo del cilindro.

Obsérvese que los campos *interiores*  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  son esencialmente distintos en forma:  $\mathbf{B}$  está dirigido hacia la derecha, es continuo en los extremos del cilindro y sufre un brusco cambio de dirección en la superficie del cilindro.  $\mathbf{E}$  está dirigido hacia la izquierda, pasa a través de la superficie del cilindro como si ésta no existiera, pero es discontinuo en las superficies extremas. Estas discrepancias son con-

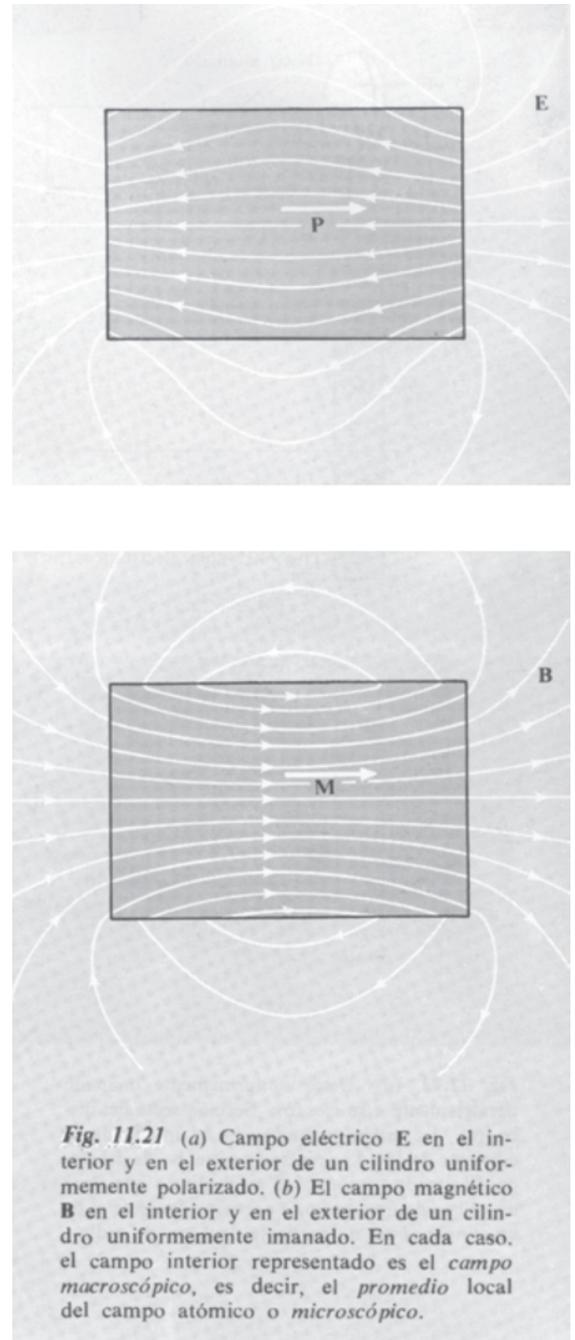
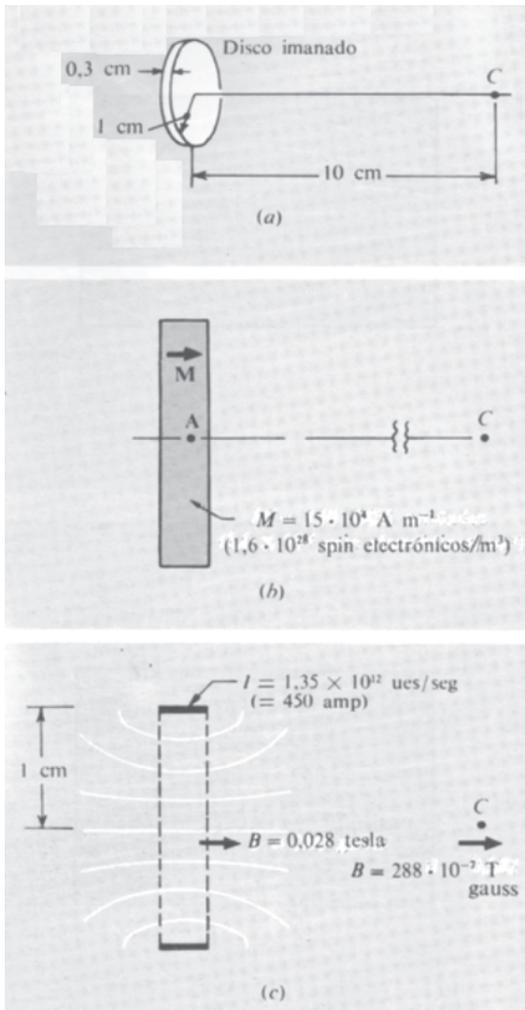


Fig. 11.21 (a) Campo eléctrico  $\mathbf{E}$  en el interior y en el exterior de un cilindro uniformemente polarizado. (b) El campo magnético  $\mathbf{B}$  en el interior y en el exterior de un cilindro uniformemente imanado. En cada caso, el campo interior representado es el campo macroscópico, es decir, el promedio local del campo atómico o microscópico.



**Fig. 11.22** (a) Disco uniformemente imanado paralelamente a su eje. (b) Sección recta del disco. (c) La corriente equivalente es una banda de corriente de 450 A, circulando por el borde del disco. El campo magnético  $\mathbf{B}$  es el mismo que el de un solenoide muy corto, o aproximadamente el de un simple anillo de corriente de 1 cm de radio.

secuencia de las diferencias esenciales entre el « interior » del dipolo eléctrico físico y el « interior » del dipolo magnético físico, como se ve en la Fig. 11.8. Por *físicos* queremos decir los que la naturaleza nos ha dado realmente.

Si sólo nos interesa el campo en el exterior, podríamos usar cualquiera de las dos representaciones para describir el campo de nuestro imán. Podríamos decir que el campo magnético del imán permanente se origina por una capa de carga magnética positiva — una densidad superficial de polos « norte » magnéticos — en la parte derecha extrema del imán, y por una capa de carga magnética negativa, polos « sur » en el otro extremo. Podríamos adoptar una función potencial escalar  $\varphi_{\text{mag}}$ , tal que  $\mathbf{B} = -\text{grad } \varphi_{\text{mag}}$ . La función potencial  $\varphi_{\text{mag}}$  estaría relacionada con las densidades de polos ficticios, como el potencial eléctrico está relacionado a la densidad de carga. La simplicidad del potencial escalar frente al potencial vector es notoria. Además, el potencial escalar magnético puede relacionarse muy fácilmente con las corrientes, que son las fuentes reales de  $\mathbf{B}$ , y así podemos utilizar el potencial escalar sin ningún uso explícito de los polos ficticios. Puede necesitarse este método cuando se trate de diseñar imanes o calcular campos magnéticos.

Sin embargo, debemos abandonar la ficción de los polos magnéticos, si queremos comprender el campo en el interior del material magnético. Que el campo magnético macroscópico dentro de un imán permanente, en un sentido muy real, es igual al campo de la Fig. 11.21b más bien que al de la Fig. 11.21a, ha sido demostrado experimentalmente desviando partículas cargadas en hierro imanado, así como por los efectos magnéticos sobre neutrones lentos que pasan aún más fácilmente por el interior de la materia.

En la Fig. 11.22a se representa un pequeño imán permanente en forma de disco, en el cual la imanación es paralela al eje de simetría. Estamos acostumbrados a ver imanes, por lo general, en forma de barras largas. Sin embargo, es posible construir discos magnéticos con intensidad considerable, empleando ciertos materiales nuevos. La imanación  $M$  vale  $15 \cdot 10^4 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ . El momento magnético del electrón vale  $0,93 \times 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ , por lo tanto este valor de  $M$  corresponde a  $1,6 \times 10^{28}$  spin electrónicos alineados, por metro cúbico. El disco es equivalente a una cinta de corriente alrededor de su borde, de densidad superficial  $\mathcal{J} = M$ . Si la anchura de la cinta es de 0,3 cm, la intensidad de la corriente  $I$  vale  $0,3 \cdot 10^{-2} \cdot 15 \cdot 10^4 = 450$  amperes —mayor corriente que la que es posible conseguir cortocircuitando una batería de automóvil. El campo  $\mathbf{B}$  en un punto del espacio, incluyendo los puntos interiores del disco, es simplemente el campo debido a la corriente en esta cinta. Por ejemplo, cerca del centro del disco,  $\mathbf{B}$  vale aproximadamente:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} = 2\pi \cdot 10^{-7} \frac{450}{0,01} = 280 \cdot 10^{-4} \text{ T} \quad (48)$$

La aproximación consiste en tratar esta banda de corriente de 0,3 cm

## Campos magnéticos en la materia

de ancho, como si fuera un simple anillo. (En la correspondiente aproximación en el ejemplo eléctrico, considerábamos las láminas de carga grandes comparadas a su separación.) En cuanto al campo en un punto lejano, sería fácil de calcular para el anillo de corriente, pero podríamos también, para un cálculo aproximado, actuar como en el ejemplo eléctrico. Es decir, podríamos hallar el momento magnético total del objeto, y encontrar el campo distante de un dipolo único, con esta intensidad.

### 11.10 Corrientes libres y el campo $\mathbf{H}$

A menudo es útil distinguir entre corrientes *ligadas* y corrientes *libres*. Las corrientes *ligadas* son corrientes asociadas con los momentos magnéticos atómicos o moleculares incluyendo el momento magnético intrínseco de las partículas con spin. Estas son las espiras de corriente molecular previstas por Ampère, las fuentes de imanación que acabamos de considerar. Las corrientes *libres* son las corrientes de conducción ordinarias, que circulan en caminos macroscópicos; corrientes que pueden iniciarse o detenerse con un interruptor y medirse con un amperímetro.

La densidad de corriente  $\mathbf{J}$  en la Ec. 42 es el promedio macroscópico de las corrientes ligadas, así que desde ahora la llamaremos  $\mathbf{J}_{\text{ligada}}$ :

$$\mathbf{J}_{\text{ligada}} = \text{rot } \mathbf{M} \quad (49)$$

En una superficie donde  $\mathbf{M}$  es discontinua, tal como la superficie lateral del bloque imanado de la Fig. 11.17, tenemos una densidad superficial de corriente  $\mathcal{J}$  que también representa corriente ligada.

Encontramos que  $\mathbf{B}$ , fuera de la materia y, como promedio espacial, dentro de ella, está relacionado con  $\mathbf{J}_{\text{ligada}}$  al igual como lo está a cualquier densidad de corriente. O sea,  $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{\text{ligada}}$ . Pero esto era en ausencia de corrientes libres. Si las hacemos intervenir, el campo que producen ellas se suma al campo originado por la materia imanada y tenemos

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J}_{\text{ligada}} + \mathbf{J}_{\text{libre}}) = \mu_0 \mathbf{J}_{\text{total}} \quad (50)$$

Vamos a expresar  $\mathbf{J}_{\text{ligada}}$  en función de  $\mathbf{M}$ , por la Ec. 49. Entonces la Ec. 50 se convierte en

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 (\text{rot } \mathbf{M}) + \mu_0 \mathbf{J}_{\text{libre}}$$

que puede reagruparse

$$\text{rot} (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}) = \mu_0 \mathbf{J}_{\text{libre}} \quad (51)$$

Si ahora *definimos* una función vectorial  $\mathbf{H}(x, y, z)$ , en cada punto del espacio, por la relación

$$\mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M} \quad (52)$$

o bien

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (52')$$

Podemos escribir la Ec. 51.

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{libre}} \quad (53)$$

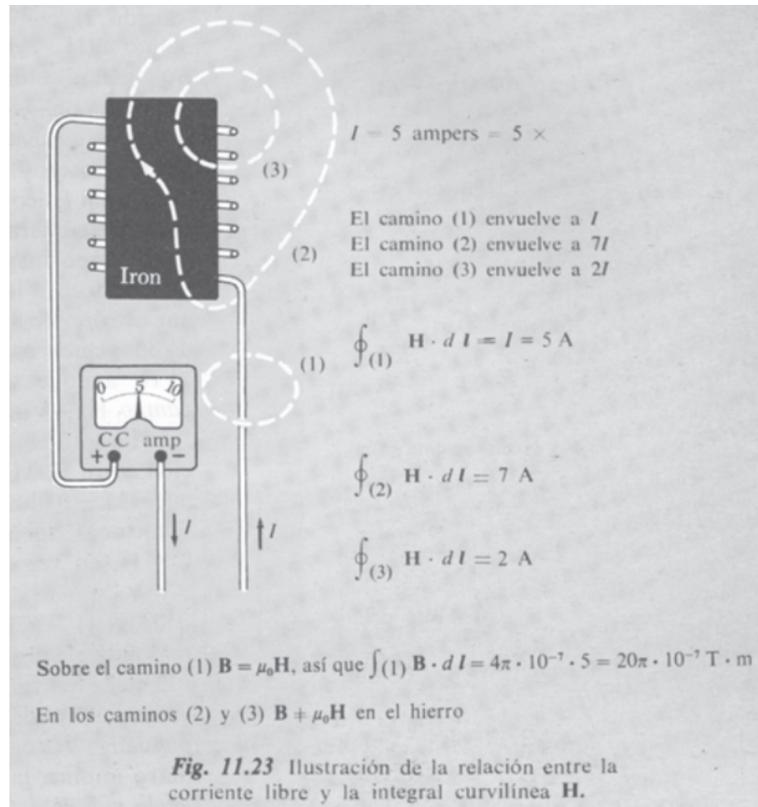
En otras palabras, el vector  $\mu_0 \mathbf{H}$ , definido por la Ec. 52, está relacionado con la corriente *libre* de la misma manera que  $\mathbf{B}$  está relacionado con la corriente total, *ligada más libre*. Sin embargo, el paralelismo no es completo, porque tenemos siempre  $\text{div} \mathbf{B} = 0$ , mientras que nuestra función vectorial  $\mathbf{H}$  no tiene que tener necesariamente divergencia nula.

Esto, seguramente, ha recordado al vector  $\mathbf{D}$  que se introdujo, un poco incongruentemente, en el capítulo pasado. Recordemos que  $\mathbf{D}$  estaba relacionado con la carga libre como  $\mathbf{E}$  lo estaba con la carga total. Aunque casi despreciamos a  $\mathbf{D}$ , el vector  $\mathbf{H}$  es muy útil por una razón práctica, muy fácil de entender. En los sistemas eléctricos, lo que es más fácil de controlar y medir son las diferencias de potencial eléctrico entre los cuerpos, y no las cantidades de carga libre en ellos. Así controlamos directamente el campo eléctrico  $\mathbf{E}$ .  $\mathbf{D}$  está fuera de nuestro control directo, y puesto que no es una cantidad fundamental en ningún sentido, lo que le ocurra no nos preocupa demasiado. En los sistemas magnéticos, lo que podemos medir más fácilmente es precisamente la corriente libre. Las conducimos a través de hilos, las medimos con amperímetros, las canalizamos en caminos bien definidos y aislados, etc. En general, tenemos mucho menor control directo sobre la imanación, y por tanto sobre  $\mathbf{B}$ . Así que el vector auxiliar  $\mathbf{H}$  es útil, aunque  $\mathbf{D}$  no lo sea.

La relación integral equivalente a la Ec. 53 es

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_{\text{libre}} \cdot d\mathbf{a} = I_{\text{libre}} \quad (54)$$

donde  $I_{\text{libre}}$  es la corriente total encerrada por el camino  $C$ . Supongamos que arrollamos una bobina alrededor de una pieza de hierro y mandamos a lo largo de esta bobina una cierta corriente  $I$ , que puede medirse conectando un amperímetro en serie con la bobina. Esta es la corriente libre, y es la única corriente libre en el sistema.



Por consiguiente, una cosa que seguro que conocemos es la integral curvilínea de  $\mathbf{H}$  a lo largo de un camino cerrado, tanto si el camino va a través del hierro como si no. La integral depende solamente del número de vueltas de nuestra bobina incluidas dentro del camino, y no de la imanación del hierro. La determinación de  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{B}$  en este sistema puede ser bastante complicada. Nos ayuda el haber separado una magnitud que podemos determinar muy fácilmente.

La Fig. 11.23 ilustra esta propiedad de  $\mathbf{H}$  con un ejemplo, y nos recuerda al mismo tiempo las unidades que deberemos usar en un caso práctico.  $\mathbf{H}$  se mide en A/m.

Consideramos a  $\mathbf{B}$  el vector campo magnético fundamental, puesto que la ausencia de cargas magnéticas, que se discutió en la Sec. 10.2, implica  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  en cualquier parte, incluso en el interior de átomos y moléculas. De  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  se deduce, como vimos ya en la Sec. 11.8, que el campo medio macroscópico en el interior de la materia es  $\mathbf{B}$ , no  $\mathbf{H}$ . Las implicaciones de esto no siempre han sido comprendidas ni consideradas en el pasado. Además  $\mathbf{H}$  tiene la ventaja práctica que