Electricidad y Magnetismo, Guía 1 **25-09-2017**

1. Demostrar: $\overrightarrow{A} \times \left(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}\right) = \overrightarrow{B}\left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C}\right) - \overrightarrow{C}\left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}\right)$

2. Demostrar que en función de los vectores unitarios de la base esférica, los vectores unitarios de la base Cartesiana están dados por:

$$\hat{\imath} = \mathrm{sen}\theta \cos\phi\, \hat{r} + \cos\theta \cos\phi\, \hat{\theta} - \mathrm{sen}\phi\, \hat{\phi} \quad ; \quad \hat{\jmath} = \mathrm{sen}\theta\, \mathrm{sen}\phi\, \hat{r} + \cos\theta\, \mathrm{sen}\phi\, \hat{\theta} + \cos\phi\, \hat{\phi} \quad ; \quad \hat{k} = \cos\theta\, \hat{r} - \mathrm{sen}\theta\, \hat{\theta}$$

3. Dada la función escalar:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}} \quad ; \quad a = \text{constante} ,$$

hallar: a) $\overrightarrow{\nabla} f$, b) el módulo y la direción de máximo incremento de f en el punto $\mathtt{P}_1 = (0,0,0)$, c) el incremento de f en $\mathtt{P}_2 = (0,a,a)$, en la dirección $\hat{\jmath}$.

4. Demostrar que el campo vectorial

$$\overrightarrow{G} = \frac{1}{r^5}\left[3xz\, \hat{\imath} + 3yz\, \hat{\jmath} + (2z^2 - x^2 - y^2)\, \hat{k}\right] \quad , \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} ,$$

satisface: a) $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{G} = 0$, b) $\overrightarrow{G} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}$, con $\overrightarrow{H} = \dfrac{1}{r^3}(-y\hat{\imath} + x\hat{\jmath})$.

5. Dado el campo vectorial

$$\overrightarrow{G} = (z^2 + yz)\, \hat{\imath} + (z^2 + xz)\, \hat{\jmath} + (2xz + 2yz + xy)\, \hat{k} ,$$

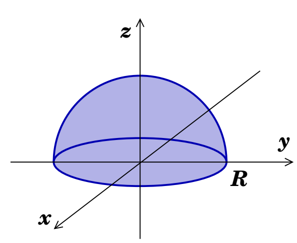
a) demostrar que $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{G} = 0$. Hallar f tal que $\overrightarrow{G} = \overrightarrow{\nabla} f$. b) Hallar la circulación de $\overrightarrow{G}$ alrededor del círculo $y^2 + z^2 = 1$ en el plano $x = 0$, recorrido en sentido antihorario. c) Evaluar la integral de camino $\int_C \overrightarrow{G} \cdot d\overrightarrow{\ell}$ para C una curva cualquiera desde $\mathtt{P}_1 = (1,1,1)$ hasta $\mathtt{P}_2 = (1,2,3)$.

6. Dado el campo vectorial

$$\overrightarrow{G} = z\, \hat{\imath} - z\, \hat{\jmath} + 4zy^2\, \hat{k} ,$$

hallar el flujo de $\overrightarrow{G}$ a través de un cilindro de radio a, altura h, y centro en el origen. `Ayuda: usar coordenadas cilíndricas`.

7. Dado el campo vectorial $\overrightarrow{G} = x\, \hat{\imath} + y\, \hat{\jmath} + (z - R)\, \hat{k}$, determinar el flujo de $\overrightarrow{G}$ a través de una semi-esfera cerrada de radio R y centro en el origen (ver figura). La superficie está formada por el casquete esférico y la cara plana en $z = 0$. Hacer el cálculo por integración directa y usando el teorema de Gauss.

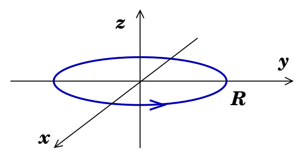


8. Dado el campo vectorial

$$\vec{G} = -3y\,\hat{\imath} + xz\,\hat{\jmath} + yz^2\,\hat{k}\ ,$$

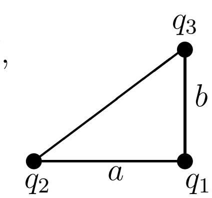
hallar la circulación de $\vec{G}$ alrededor del círculo $x^2 + y^2 = 4$ en el plano $z = 2$, recorrido en sentido antihorario.

9. Dado el campo vectorial $\vec{G} = -y\,\hat{\imath} + x\,\hat{\jmath} + \dfrac{x^2 y}{z^2 + R^2}\,\hat{k}$, determinar la circulación de $\vec{G}$ a lo largo de la curva cerrada C en la figura. C es un círculo de radio R, está en el plano $z = 0$, tiene centro en el origen, y se recorre en sentido antihorario. Hacer el cálculo por integración directa y usando el teorema de Stokes.



10. Dada la función $f = x^3 + y^3 + z^3$, evaluar la integral de camino $\int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{\ell}$ para C la recta que va desde $\mathtt{P}_1 = (a, a, 0)$ hasta $\mathtt{P}_2 = (0, 0, b)$. Realizar el cálculo por integración directa y usando el teorema del gradiente.

11. En los vértices de un triángulo rectángulo se colocan cargas $q_1 = -4\,\mu C$, $q_2 = 5\,\mu C$, $q_3 = 10\,\mu C$, como se indica en la figura. Los lados del triángulo son $a = 8\,cm$ y $b = 6\,cm$. Hallar: a) la fuerza que ejerce q_1 sobre q_3, b) la fuerza que ejerce q_2 sobre q_3, c) la fuerza total sobre q_3.



12. Tres cargas puntuales $q_{\mathtt{A}} = 2q$, $q_{\mathtt{B}} = -4q$ y $q_{\mathtt{C}} = -9q$ se encuentran en los puntos $\mathtt{A} = (d, 0, 0)$, $\mathtt{B} = (0, 2d, 0)$ y $\mathtt{C} = (0, 0, 3d)$ respectivamente. Calcular: a) $\vec{E}$ en $\mathtt{P} = (0, 0, 0)$, b) la magnitud de la fuerza sobre una carga Q colocada en $\mathtt{P}$.

Respuestas

3) a) $\vec{\nabla} f = \dfrac{x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + (z+a)\hat{k}}{[x^2 + y^2 + (z+a)^2]^{3/2}} - \dfrac{x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + (z-a)\hat{k}}{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{3/2}}$; b) $\dfrac{2}{a^2}$, $\hat{k}$; c) $-\dfrac{\left(5\sqrt{5} - 1\right)}{5\sqrt{5}a^2}$

5) a) $f = z^2 x + xyz + z^2 y + c$; b) 0; c) 30

6) $\pi h a^4$ 7) $2\pi R^3$ 8) 20π 9) $2\pi R^2$ 10) $b^3 - 2a^3$

11) a) $-100\,N\hat{\jmath}$; b) $(36\hat{\imath} + 27\hat{\jmath})\,N$; c) $(36\hat{\imath} - 73\hat{\jmath})\,N$

12) a) $\dfrac{kq}{d^2}\,(-2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k})$; b) $\dfrac{\sqrt{6}kqQ}{d^2}$