Ley de Ampère - Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad , \text{ válida si } \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

En general $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

Hay que modificar $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \vec{X}$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \nabla \cdot \vec{X}$$

$$\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{X}$$

Por ley de Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{X} \quad \Rightarrow \quad \vec{X} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

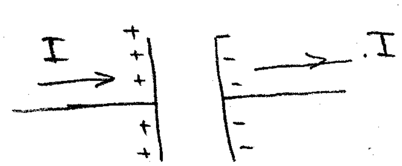
Consecuencias

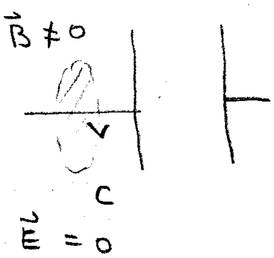
1) corriente de desplazamiento

$$\vec{J}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad , \quad I_D = \int_S \vec{J}_D \cdot \hat{n} \, dA$$

$$I_D = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dA = \varepsilon_0 \frac{d \phi_e}{dt} \quad \left\{ \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + I_D) \right.$$

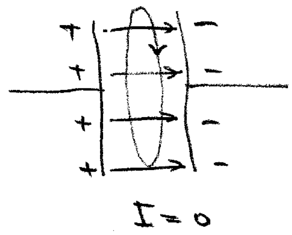
Permite explicar aparentes paradojas. El ejemplo típico es el condensador cargándose.





$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

I atraviesa S



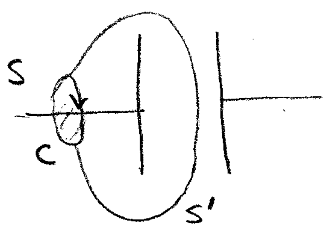
$$\oint_{C'} \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 I_D$$

$$I_D = \varepsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \quad , \quad \phi_e = EA = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} A$$

$$\frac{d\phi_e}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0} I$$

$$\Rightarrow \oint_{C'} \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 I$$

otra forma de ver la consistencia.



$$\oint_C \bar{B}\cdot d\bar{l} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot\hat{n}\, dA$$

$$= \int_{S'} (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot\hat{n}\, dA$$

2) Teorema de Poynting

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \vec{E}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{E}\cdot\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

restando

$$\mu_0\left\{\varepsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right\} + \mu_0\vec{E}\cdot\vec{J} = \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) - \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\right\} + \vec{E}\cdot\vec{J} = -\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_E + u_B) + \vec{E}\cdot\vec{J} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{S} \quad , \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

vector de Poynting

Ec. de conservación de energía

Integrando sobre volumen

$$\frac{d}{dt}\int_V \left(\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2\right)dV + \int_V \vec{E}\cdot\vec{J}\,dV = -\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{S}\,dV$$

$$= -\oint_S \vec{S}\cdot\hat{n}\,dA$$

Además

$$\int_V \vec{E}\cdot\vec{J}\,dV = \frac{dU_M}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(U_E + U_B + U_M) = -\oint_S \vec{S}\cdot\hat{n}\,dA$$

razón

$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$ hace trabajo, $dW = \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt$ sobre q moviéndose con velocidad $\vec{v}$ $\Rightarrow$ energía mecánica U_M almacenada

$dU_M = q\,\vec{E}\cdot\vec{v}\,dt$ para una carga puntual q

para carga distribuida $q = \rho\,dV$, $\rho\vec{v} = \vec{J}$

$$\frac{dU_M}{dt} = \int_V \vec{E}\cdot\vec{J}\,dV$$

Concluimos que $\vec{S}$ debe representar flujo de energía por unidad de tiempo por unidad de área

$[E] = \frac{N}{C}$, $[B] = \frac{Ns}{Cm}$

$$[S] = \frac{W}{m^2} = \frac{J}{s\,m^2} = \frac{N}{s\,m}$$

$[\mu_0] = \frac{N}{A^2}$

Se demuestra también que los campos tienen momento y la densidad de momento es

$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$

$$\vec{g} = \varepsilon_0\mu_0\vec{S} = \varepsilon_0\,\vec{E}\times\vec{B}$$

$$[g] = \frac{N}{s\,m}\,\frac{s^2}{m^2} = \frac{N\,s}{m^3}$$

3) Ec. de ondas.

En el vacío $\rho=0$, $\vec{J}=0$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}(\cancelto{0}{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}) - \nabla^2\vec{E}$$

$$-\nabla^2\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{B} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\nabla^2\vec{E} = 0$$

similarmente $$\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\nabla^2\vec{B} = 0$$

$\vec{E}$ y $\vec{B}$ satisfacen la ec. de ondas con velocidad de propagación $\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c$

$$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ \frac{N}{A^2} \quad , \quad \varepsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}\ \frac{C^2}{N\,m^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 2{,}9979\times10^{8}\ m/s \sim 3\times10^{8}\ m/s$$ velocidad de la luz en el vacío