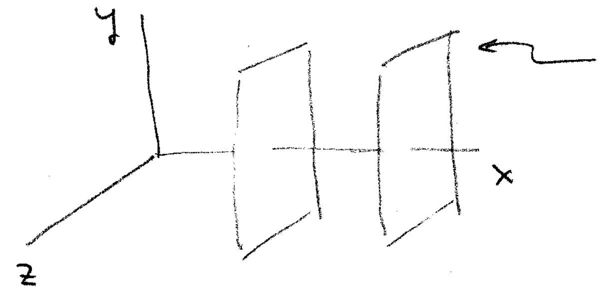
ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Estudiaremos ondas planas



frente de ondas es un plano en el cual todos los puntos tienen la misma amplitud

$\vec{E} = \vec{E}(x,t)$; $\vec{B} = \vec{B}(x,t)$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \; ; \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \frac{\partial E_y}{\partial x}\hat{z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\hat{y} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\partial B_y}{\partial x}\hat{z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\hat{y} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad y \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_x \text{ constante}$$

Como consideramos una situación dinámica, $E_x = 0$

Similarmente $\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \Rightarrow B_x = 0$

<u>importante</u> : $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son transversos a la dirección de movimiento

$$\vec{E} = E_y(x,t)\,\hat{y} + E_z(x,t)\,\hat{z}$$

$$\vec{B} = B_y(x,t)\,\hat{y} + B_z(x,t)\,\hat{z}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \qquad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

$$E_y = f(x-ct) + g(x+ct) \quad ; \quad E_z = F(x-ct) + G(x+ct)$$

B_y, B_z también satisfacen la ec. de ondas, pero no son independientes de E_y, E_z. Se encuentra

$$c B_y = -F(x-ct) + G(x+ct)$$

$$c B_z = f(x-ct) - g(x+ct)$$

e.g. $\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{1}{c}(-F' + G')$; $\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{c^2}(-cF' + cG')$

Consideraremos sólo ondas viajeras en una dirección

$$E_y = f(x-ct) \quad ; \quad E_z = F(x-ct)$$

$$cB_y = -F(x-ct) \quad ; \quad cB_z = f(x-ct)$$

Los campos satisfacen $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$

ONDAS ARMÓNICAS PLANAS

Consideraremos el caso de polarización lineal, i.e $\vec{E}$ en una dirección fija.

$$f(x-ct) = E_m \cos(kx - \omega t + \delta)$$

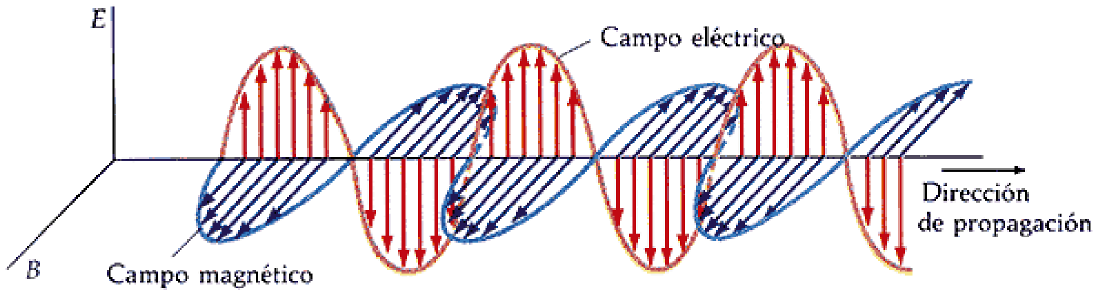
$$\vec{E} = E_m \cos(kx - \omega t + \delta)\,\hat{y}$$

$$\vec{B} = B_m \cos(kx - \omega t + \delta)\,\hat{z} \qquad \boxed{B_m = \frac{E_m}{c}}$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \Rightarrow -kB_m = \frac{1}{c^2} E_m(-\omega) \Rightarrow \boxed{c = \frac{\omega}{k}}$$

$$\omega = 2\pi f \ , \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \boxed{c = f\lambda}$$

→


E
Campo eléctrico
Dirección
de propagación
B
Campo magnético

características

* $\vec{E}, \vec{B} \perp$ dirección de propagación
* $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$
* $\vec{E}$ y $\vec{B}$ están en fase

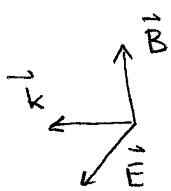
En general se define $\vec{k}$ tal que tiene dirección la dirección de propagación y $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$. La onda plana polarizada linealmente se escribe

$$\vec{E} = E_m \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)\, \hat{n}$$

$\hat{n}$: vector de polarización , $\hat{n} \cdot \hat{k} = 0$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\, \hat{k} \times \vec{E}$$

Ejemplo : En una onda EM viajando hacia el oeste el campo $\vec{B}$ oscila verticalmente (en y), tiene frecuencia 180 kHz y amplitud máxima $8{,}65 \times 10^{-19}$ T. Hallar la frecuencia, dirección y amplitud máxima del campo eléctrico



$E_m = c B_m = 2{,}6$ N/C

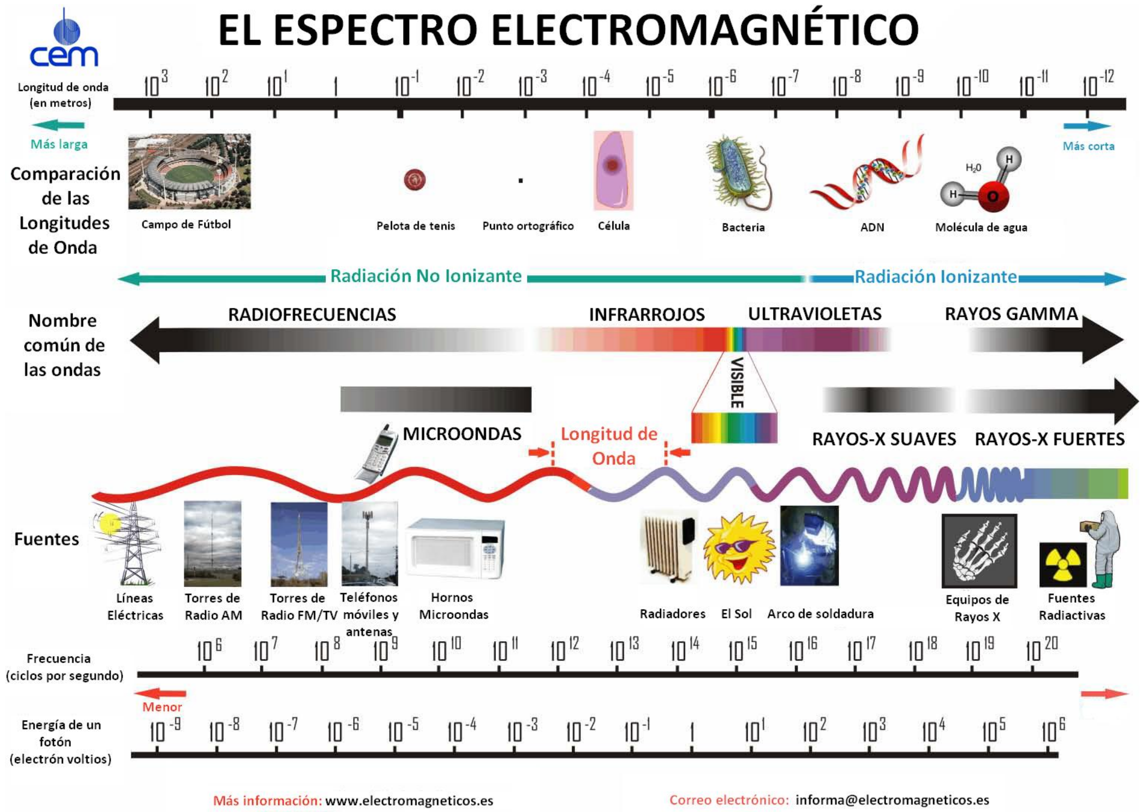
$f = 180$ kHz

Espectro

visible $4{,}3 \times 10^{14}$ Hz $- 7{,}5 \times 10^{14}$ Hz

700 nm $-$ 400 nm

λ(nm)	color
400-450	violeta
450-400	azul
500-550	verde
550-600	amarillo
600-650	naranja
650-700	rojo



Polarización genérica

Para ondas armónicas planas propagándose en x, el campo eléctrico más general está dado por:

$$\overrightarrow{E} = E_1 \cos(kx - \omega t + \delta_1)\hat{y} + E_2 \cos(kx - \omega t + \delta_2)\hat{z}$$

donde $k = \dfrac{\omega}{c}$ y $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$. El campo magnético correspondientes es:

$$\overrightarrow{B} = -\frac{E_2}{c}\cos(kx - \omega t + \delta_2)\hat{y} + \frac{E_1}{c}\cos(kx - \omega t + \delta_1)\hat{z} = \frac{1}{c}\,\hat{k} \times \overrightarrow{E}$$

donde $\hat{k} = \hat{x}$ es el vector unitario de propagación.

Un ejemplo interesante es el caso de polarización circular en el cual los campos tienen la forma:

$$\overrightarrow{E} = E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{y} + E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\hat{z}$$

$$\overrightarrow{B} = -B_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\hat{y} + E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{z}$$

donde $B_0 = \dfrac{E_0}{c}$.

Intensidad de las ondas EM

las ondas EM transportan energía, sabemos que en $\vec{E}$ y $\vec{B}$ se almacena energía

$$u_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad , \quad u_e = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$$

∴ Nos esperamos $I \sim cE^2 \sim cB^2$

Se encuentra

$$I = S_{promedio} = \langle S \rangle$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

vector de Poynting.
(está en la dirección de propagación)

Para ondas armónicas

$$\vec{E} = E_m \operatorname{sen}(kx - \omega t)\,\hat{j} \quad , \quad \vec{B} = B_m \operatorname{sen}(kx - \omega t)\,\hat{k} \quad , \quad B_m = \frac{E_m}{c}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} E_m B_m \operatorname{sen}^2(kx - \omega t)\,\hat{i}$$

$$S = |\vec{S}| = \frac{1}{\mu_0} E_m B_m \operatorname{sen}^2(kx - \omega t)$$

$$S_{prom} = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, S = \frac{1}{T}\frac{E_m B_m}{\mu_0} \overbrace{\int_0^T \operatorname{sen}^2(kx - \omega t)\, dt}^{T/2}$$

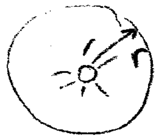
$$I = \frac{1}{2\mu_0} E_m B_m = \frac{1}{2\mu_0 c} E_m^2 = \frac{c\varepsilon_0}{2} E_m^2 = \frac{c}{2\mu_0} B_m^2$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \Rightarrow \mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$$

unidades
$[I] = 1\ W/m^2$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}(2\pi)$$

Sabemos también



$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \quad , \quad P : \text{potencia}$$

Ejemplo

El sol emite radiacion EM de potencia $3,85 \times 10^{26}$ W.
Hallar la amplitud máxima de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en la Tierra
$(R = 1,496 \times 10^{11}\ m)$.

$$I = \frac{P}{4\pi R^2} = \frac{3,85 \times 10^{26}\ W}{(1,496 \times 10^{11} m)^2 \times 4\pi} = 1368,95\ W/m^2 = 1369\ W/m^2$$

$$I = \frac{c\varepsilon_0}{2} E_m^2 \quad , \quad E_m = \sqrt{\frac{2I}{c\varepsilon_0}}$$

$$\varepsilon_0 = 8,85418 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \qquad \frac{W}{m^2} = \frac{J}{sm^2} = \frac{N}{sm}$$

$$E_m = \sqrt{\frac{2 \times 1369\ N/sm}{3 \times 10^8 \frac{m}{s}\ 8,85418 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}}} = 1,015 \times 10^3\ N/C$$

$$B_m = \frac{E_m}{c} = 3,38 \times 10^{-6}\ T$$

Indice de Refracción

en el vacío

velocidad de ondas EM (para cualquier ν) $\qquad c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$

en otro medio

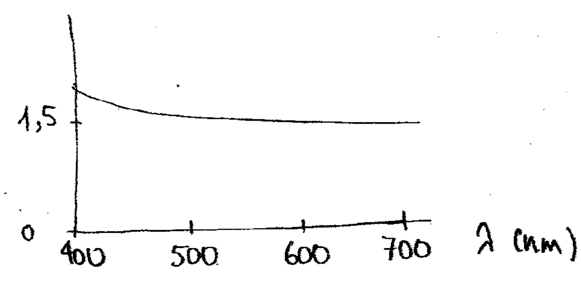
$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \neq c$$

En general $\mu > \mu_0$, $\epsilon > \mu_0$ y $v < c$. Es conveniente definir una cantidad n, llamada indice de refracción, tal que

$$v = \frac{c}{n} \quad , \quad n = \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

material	n
aire	1,0003
agua	1,33
glicerina	1,47
vidrios	1,46 – 1,96
diamante	2,41

n también puede depender de la longitud de onda. En el vacío n no depende de λ y en el aire esto también es aproximadamente cierto. Sin embargo, para vidrio se observa



La dependencia de n con λ origina el fenómeno de dispersión (separación de longitudes de onda por refracción). El ejemplo típico es el arco iris