Propiedades básicas de ondas

Esencialmente una onda es una perturbación que se propaga en el tiempo. El ejemplo típico es una onda en una cuerda extendida horizontalmente en el cual la perturbación es el desplazamiento vertical de la cuerda. En general la pertubación es una función del tiempo y del punto en el espacio denotada $\psi(x, y, z, t)$. Si la perturbación se propaga sin dispersión, o sea sin cambiar su forma, entonces se demuestra que ψ satisface la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2 \psi = 0 \ , \tag{1}$$

donde la constante v es la velocidad de propagación de la onda.

Estudiaremos ondas propagándose en una dimensión, concretamente en x. Entonces $\psi = \psi(x, t)$ satisface

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \ . \tag{2}$$

Para hallar la solución general de esta ecuación diferencial en derivadas parciales es conveniente hacer el cambio de variables

$$u = x + vt \quad ; \quad w = x - vt \ . \tag{3}$$

Utilizando la regla de la cadena se encuentra

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial w} \ , \tag{4}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t} = v\frac{\partial \psi}{\partial u} - v\frac{\partial \psi}{\partial w} \ . \tag{5}$$

Aplicando nuevamente la regla de la cadena en las ecuaciones (4) y (5) se obtiene

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial w \partial u}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial w}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial w} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2} \ , \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial w \partial u}\frac{\partial w}{\partial t}\right) - v\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial w}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2}\frac{\partial w}{\partial t}\right) = v^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} - 2v^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial w} + v^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2} \ . \tag{7}$$

Sustituyendo (6) y (7) en (2) se llega a

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial w} = 0 \ . \tag{8}$$

La solución general es entonces

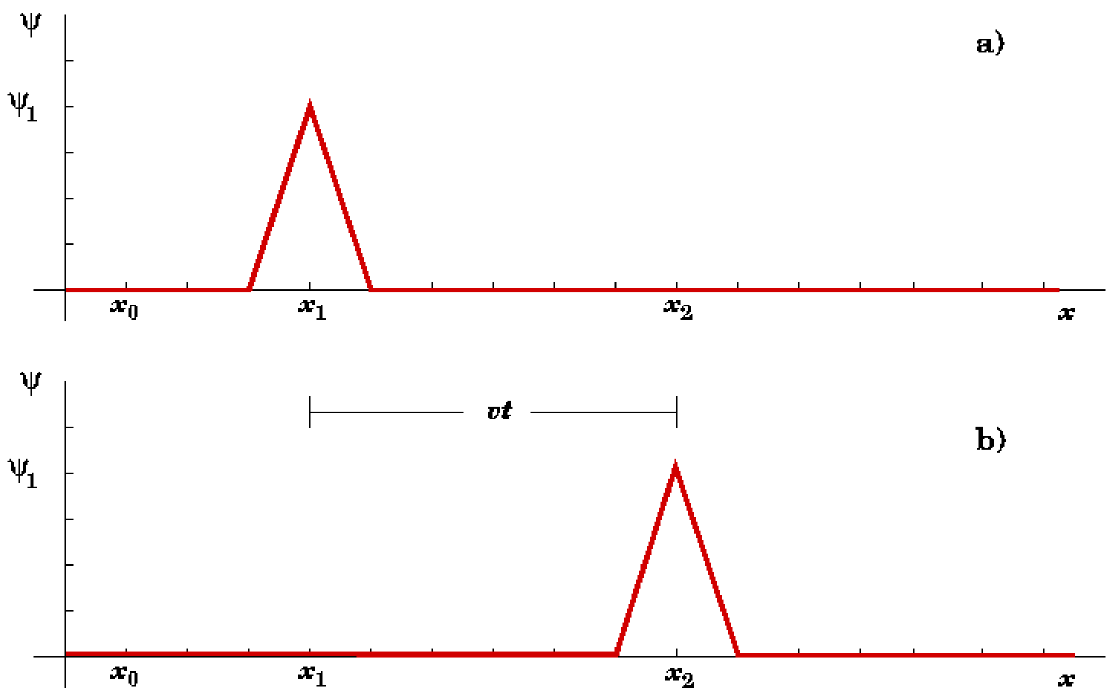
$$\psi(u, w) = f(w) + g(u) \ , \tag{9}$$

donde $f(w)$ y $g(u)$ son funciones arbitrarias de sus variables. Es fácil comprobar que (9) satisface la ecuación (8).

Invirtiendo el cambio (3) se deduce que la solución general de la ecuación de ondas (1), expresada en las variables originales (x, t), está dada por

$$\psi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \ . \tag{10}$$

El primer término $f(x - vt)$ se interpreta como una perturbación que se propaga hacia la derecha, mientras que el segundo término $g(x+vt)$ representa una perturbación que se propaga hacia la izquierda. Podemos decir que la solución general es la superposición de una onda que se mueve hacia la derecha con velocidad v, y una onda que se mueve hacia la izquierda también con velocidad v.



Para entender como $f(x - vt)$ corresponde a una onda derecha es útil estudiar el caso sencillo de propagación de un pulso de onda. La figura `a` muestra el pulso de onda en $t = 0$. Es decir

$$\psi(x, 0) = f(x) \ , \tag{11}$$

donde $f(x)$ es la función que describe la forma del pulso. Por ejemplo, $f(x_0) = 0$ y $f(x_1) = \psi_1$. La figura `b` ilustra el pulso luego de haber transcurrido un tiempo $t > 0$. En este intervalo el pulso se desplaza, sin cambiar su forma, una distancia $\Delta x = vt$. El pulso en la figura 2 está descrito por

$$\psi(x, t) = f(x - vt) \ . \tag{12}$$

Por ejemplo, para el punto x_2 el valor de la perturbación es ψ_1 y por lo tanto

$$\psi(x_2, t) = \psi_1 = f(x_1) = f(x_2 - vt) \ , \tag{13}$$

donde se ha usado que $x_2 = x_1 + vt$. En forma similar se demuestra que $g(x + vt)$ corresponde a una onda propagándose en x hacia la izquierda.

Un concepto importante es el de frente de ondas, definido como la superficie tal que el valor de la perturbación en un tiempo t es el mismo en todos los puntos sobre la superficie. Por ejemplo, para la onda en una dimensión $\psi(x, t) = f(x - vt)$, el frente de ondas es el plano $x =$ constante, y a este tipo de ondas se les llama ondas planas. Nótese que la dirección de propagación es perpendicular al frente de ondas.

ONDAS ARMÓNICAS

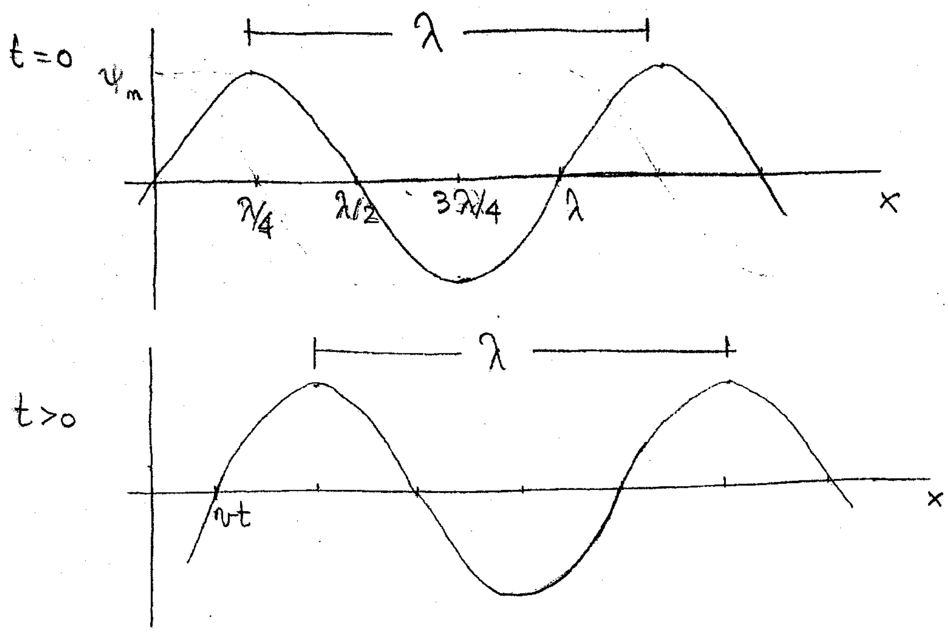
Un caso sencillo e interesante de tren de ondas viajeras son las ondas armónicas descritas por

$$\psi(x,t) = \psi_m \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)$$

ψ_m es la máxima amplitud de la onda.

λ es una distancia llamada longitud de onda. Es la separación entre dos crestas sucesivas de la onda.

Gráficamente



El periodo T es el tiempo necesario para que la onda recorra una distancia λ. Como la onda se mueve con velocidad v se tiene entonces

$$T = \frac{\lambda}{v} \quad , \quad \lambda = vT$$

Unidades: $[\lambda] = m$, $[T] = s$

La perturbación $\psi(x,t)$ puede entonces escribirse

$$\psi(x,t) = \psi_m \,\text{sen}\, 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$

Esto muestra que en x la onda se repite cada λ mientras que en t se repite cada T. Para t fijo la onda es sinusoidal. Para x fijo el punto de la onda realiza movimiento armónico simple.

Es también conveniente definir las cantidades

$$f = 1/T \quad , \quad \text{frecuencia} \qquad [f] = Hz = s^{-1}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad , \quad \text{frecuencia angular}$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} \quad , \quad \text{número de onda} \qquad [K] = m^{-1}$$

K y ω no son independientes ya que automaticamente se cumple

$$\frac{\omega}{K} = v$$

Ahora se puede escribir

$$\psi(x,t) = \psi_m \,\text{sen}\,(Kx - \omega t)$$

observaciones

1) La velocidad y aceleración de un punto de la onda son

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\omega\psi_m \cos(Kx - \omega t)$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{max} = \omega\psi_m$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi_m \,\text{sen}(kx-\omega t)$$

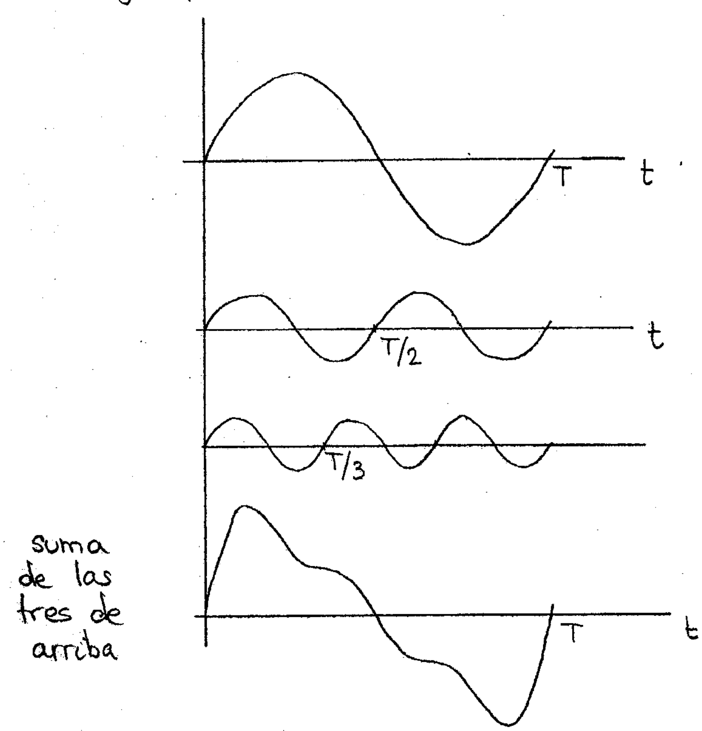
$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_{max} = \omega^2 \psi_m$$

2) La expresión

$$\psi(x,t) = \psi_m \,\text{sen}(kx - \omega t + \delta)$$

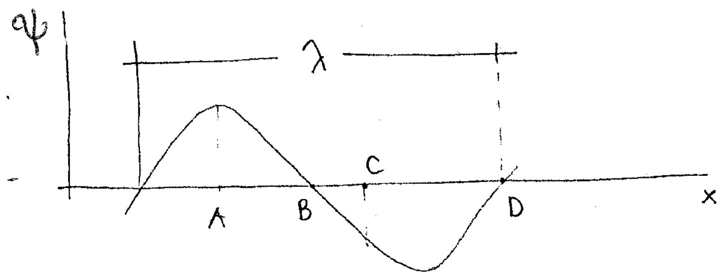
es mas general ya que no asume $\psi(0,0) = 0$

3) Expansión de Fourier. La importancia de las ondas armónicas está en que cualquier onda más complicada de período T, puede escribirse como combinación de ondas armónicas de período T/2, T/3, etc. Por ejemplo (x fijo)



POTENCIA E INTENSIDAD

Un concepto importante asociado al movimiento ondulatorio es la cantidad de energía transferida por unidad de tiempo, es decir, la potencia transferida. Estudiaremos el caso de ondas en una cuerda.



En un tiempo T, todo el segmento de longitud λ pasa por D. Necesitamos entonces calcular la energía almacenada en este segmento. Todos los puntos tienen la misma energía total, repartida en cinética y potencial. Por ejemplo, en B toda la energía es cinética y vale

$$E_B = \frac{1}{2} \Delta m \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2_{max} = \frac{1}{2} \Delta m (\omega \psi_m)^2$$

Para hallar la energía total en el segmento sustituimos Δm por $\mu \lambda$. Entonces, la potencia transmitida es *

$$P = \frac{\frac{1}{2} \mu \lambda \omega^2 \psi_m^2}{T} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 \psi_m^2 \quad , \quad [P] = W$$

El resultado que P depende del cuadrado de la frecuencia y del cuadrado de la amplitud es válido en general para todo tipo de ondas.

* μ es la densidad de masa

La intensidad I de la onda se define como la potencia por unidad de área del frente de onda. En general se demuestra que la intensidad está dada por

$$I = uv \ , \tag{14}$$

donde v es la velocidad de propagación y u es la densidad de energía. Por ejemplo, para la onda en la cuerda, la potencia es $P = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 \psi_m^2$, y la energía es $E = \frac{1}{2}\mu \lambda \omega^2 \psi_m^2$. El resultado (14) se obtiene sustituyendo P en $I = P/A$, y utilizando que $u = E/(A\lambda)$, donde A es el área del frente.

En el caso de ondas esféricas los frentes de onda son superficies de esferas de radio r y por lo tanto la intensidad a una distancia r de la fuente de potencia P es

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \ . \tag{15}$$

La unidad de intensidad es W/m^2.