**Métodos Matemáticos de la Física II, Guía 1** **13-01-2017**

1. Graficar la región determinada por la desigualdad:

   $|5z - 3 + i| > 4$

   R: exterior de disco de radio $\frac{4}{5}$ y centro en $z_0 = \frac{3-i}{5}$

2. Utilizar $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha$ para demostrar que $\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\mathrm{sen}^2\theta + \mathrm{sen}^4\theta$.

3. Resolver: a) $z^6 = 32(\sqrt{3} + i)$, b) $z^4 + iz^2 + 2 = 0$

   R: a) $z_k = 2e^{\frac{i(12k+1)\pi}{36}}$ , $k = 0, \cdots, 5$ ; b) $z_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}$ , $z_2 = e^{\frac{5i\pi}{4}}$ , $z_3 = \sqrt{2}\, e^{\frac{3i\pi}{4}}$ , $z_4 = \sqrt{2}\, e^{\frac{7i\pi}{4}}$

4. Utilizando las definiciones de las funciones trigonométricas e hiperbólicas, probar

   a) $\cosh^2 z - \mathrm{senh}^2 z = 1$ ; $|\cosh z|^2 - |\mathrm{senh}\, z|^2 = 1 - 2\mathrm{sen}^2 y$

   b) $\cos^2 z + \mathrm{sen}^2 z = 1$ ; $|\cos z|^2 + |\mathrm{sen}\, z|^2 = 1 + 2\mathrm{senh}^2 y$ $(z = x + iy)$

5. Hallar todas las soluciones de: a) $\mathrm{sen}\, z = \sqrt{2}$, b) $\cosh z = 0$.

   R: a) $z_k = (2k + \dfrac{1}{2})\pi \pm i\ln(1 + \sqrt{2})$, b) $z_k = i(2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. Determinar si $u(x, y)$ puede ser la parte real de una función analítica, y en ese caso determinar la función conjugada $v(x, y)$ tal que $f = u + iv$ sea analítica.

   a) $u(x, y) = e^x\,(x\cos y - y\mathrm{sen}\, y)$ ; b) $u(x, y) = 2x + y^3 - 3x^2 y$

   c) $u(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ ; d) $u(x, y) = \mathrm{senh}\, x \cos y$

   R: a) $v(x, y) = e^x\,(x\mathrm{sen}\, y + y\cos y) + c$ , $f = ze^z + ic$ ($c \in \mathbb{R}$ constante , $z = x + iy$)

   b) $v(x, y) = 2y + x^3 - 3xy^2 + c$ , $f = 2z + iz^3 + ic$ ; d) $v(x, y) = \cosh x\mathrm{sen}\, y + c$ , $f = \mathrm{senh}\, z + ic$

7. Evaluar las siguientes expresiones en la hoja $-\pi < \theta < \pi$:

   a) $(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2})^{1-i}$ ; b) $(-5i)^i$

   R: a) $e^{-\frac{\pi}{6}}(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2})$ ; b) $e^{\frac{\pi}{2}}\big[\cos(\ln 5) + i\mathrm{sen}(\ln 5)\big]$

8. Dada la transformación $w = \dfrac{i - z}{i + z}$, hallar la imagen de todos los puntos con $\mathrm{Im}\, z \geq 0$.
   R: $|w| \leq 1$

9. Dada la función $f(z) = (z - 1 + 3i)^{1/4}$,

   a) hallar los puntos de ramificación en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. R: $1 - 3i$, $\infty$

   b) determinar cortes de rama tal que $f(z)$ sea univaluada. R: $z - 1 + 3i = re^{i\theta}$ , $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$

   c) describir la superficie de Riemann asociada a $f(z)$.
   R: consiste de cuatro hojas, es topológicamente equivalente a una esfera.

   Repetir para: a) $f(z) = \sqrt{z^3 + 8i}$, b) $f(z) = \sqrt{z^2 + 4}$.